大問3

(1) $a_n = 5b_n + r_n$

$$a_{n+1} = 2(5b_n + r_n)^2 + 1$$
$$= 2(25b_n^2 + 10b_n r_n + r_n^2) + 1$$
$$= 2\cdot 25 b_n^2 + 2\cdot 10 b_n r_n + 2r_n^2 + 1$$
$$= 5(10b_n^2 + 4b_n r_n) + 2r_n^2 + 1$$

$b_{n+1} = 10b_n^2 + 4b_n r_n$

$r_{n+1} = \begin{cases} 2r_n^2 + 1 & (r_{n+1} < 5) \\ 2r_n^2+1 \text{ を5で割った余り} & (r_{n+1} \geq 5) \end{cases}$

$r_1 = 3,\ r_2 = 4,\ r_3 = 3,\ r_4 = 4, \dots$ となり

$r_n = \begin{cases} 3 & (n = 2k-1) \\ 4 & (n = 2k) \end{cases}$ (kは自然数)

(2)

$b_1 = 1$ より $c_1 = 1$
$b_2 = 25$ より $c_2 = 0$

$n = 2k-1$ のとき

$$a_{2k} = 5(10b_{2k-1}^2 + 4b_{2k-1}\cdot 3) + 2\cdot 3^2 + 1$$
$$= 5(10b_{2k-1}^2 + 12b_{2k-1} + 3) + 4$$

$$b_{2k} = 10b_{2k-1}^2 + 12b_{2k-1} + 3$$
$$= 5(2b_{2k-1}^2 + 2b_{2k-1}) + 2b_{2k-1} + 3$$

$n=2k$のとき

$$a_{2k-1} = 5(10b_{2k-2}^2 + 4b_{2k-2}\cdot 4) + 2\cdot 4^2 + 1$$
$$= 5(10b_{2k-2}^2 + 16b_{2k-2} + 6) + 3$$
$$b_{2k-1} = 10b_{2k-2}^2 + 16b_{2k-2} + 6$$
$$= 5(2b_{2k-2}^2 + 3b_{2k-2} + 1) + b_{2k-2} + 1$$

$b_{2k} = 5S_1 + 2b_{2k-1} + 3$ （今後 S添字は定数を表す）

$b_{2k-1} = 5S_2 + b_{2k-2} + 1$

$$b_{2k} = 5S_1 + 2(5C_2 + b_{2k-2} + 1) + 3$$
$$= 5S_1 + 10 + 2b_{2k-2} + 2 + 3$$
$$= 5(S_1 + 3) + 2b_{2k-2}$$

b_{2k}は2つ前の余りを2倍したものに依存する
これをb_2まで戻すと
$b_2 = 25$であり、5の倍数であるため、これを
2倍して$5(C_1+3)$を足す操作をくり返しても

5の倍数である。
よって b_{2k} を5で割った余りは0

これにより $b_{2k-1} = 5S_k + b_{2k-2} + 1$

b_{2k-2} は5の倍数となるので b_{2k-1} の余りは1

したがって b_n の余り $= \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ 1 & (n = 2k-1) \end{cases}$ k 自然数

(3) $n = 2k-1$ のとき

$a_{2k} = 5(10b_{2k-1}^2 + 12b_{2k-1} + 3) + 4$

b_{2k-1} を5で割ったときの余りは1なので

$b_{2k-1} = 5l + 1$ (l 整数)

$a_{2k} = 5\{10(25l^2 + 10l + 1) + 12 \cdot 5l + 12$

$+ 3\} + 4$

$= 5(250l^2 + 100l + 10 + 60l + 15) + 4$

$= \underbrace{5(250l^2 + 160l} _{50の倍数} + 25) + 4$

$\rightarrow 5 \cdot 25 + 4 = 129$

129の50で割った余りは29

$n=2k$ のとき

$a_{2k-1} = 5(10b_{2k-2}^2 + 16b_{2k-2} + 6) + 3$

$b_{2k-2} = 5l$ より

$a_{2k-1} = \underbrace{5(10 \cdot 25l^2 + 16 \cdot 5l + 6)}_{5\text{の倍数}} + 3$

$30+3=33$

$k=1$ のとき $a_1 = 8$ より 50で割った余り 8

したがって a_nを50で割った余りは

$$\begin{cases} 8 & (n=1) \\ 29 & (n=2k)\ (k=\text{自然数}) \\ 33 & (2k+1) \end{cases}$$