大問4

(1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x} = \log x \cdot x^{-1}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} x^{-1} - \log x \cdot x^{-2}$

$= \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$1 - \log x = 0$ すなわち $x = e$ のとき

$f'(e) = \dfrac{1}{e}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$

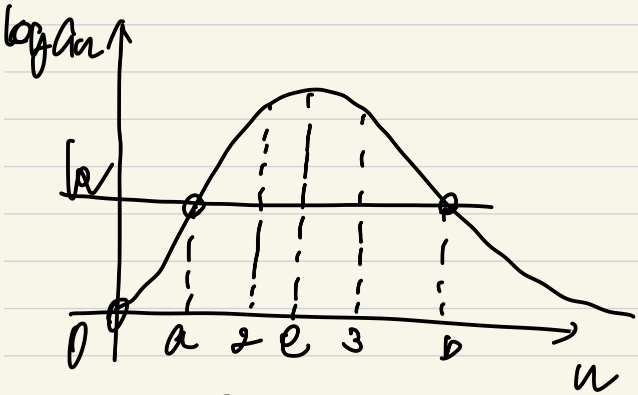
したがって $x = e$ のとき最大値 $\dfrac{1}{e}$

(2) $a_n = \sqrt[n]{n}$

$\log a_n = \dfrac{1}{n} \log n$

$\log a_n = \dfrac{\log n}{n}$

$a_n > 0$, $\log a_n > 0$ のため a_n の最大値を調べるために $\log a_n$ の最大値を調べればよい。



nは自然数であるため $2<e<3$ より
$n=2$ と $n=3$ のときでどちらが値が大きいか比較する

$$\frac{\log 2}{2}-\frac{\log 3}{3}$$

$$=\frac{3\log 2-2\log 3}{6}$$

$$=\frac{\log 2^3-\log 3^2}{6}=\frac{1}{6}\log\frac{8}{9}<0$$

したがって $\frac{\log 3}{3}$ の方が大きく、
a_n の最大値は $\underline{\sqrt[3]{3}}$ //

また $\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$
であり $\underline{\lim_{n\to\infty}a_n=1}$ である。//

(3) $a^b = b^a$

$$b\log a = a\log b$$

$$\frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b}$$

$0 < a < e$ であり

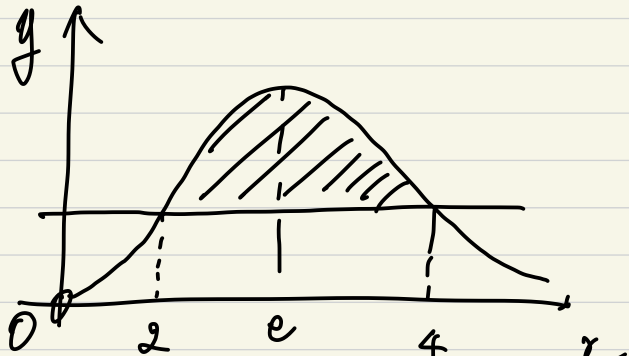
$a=1$ のときは $b=1$ しかありえないため不適

$a=2$ のとき

$$\frac{\log 2}{2} = \frac{\log 2^2}{4}$$ となり適する

したがって $\underline{(a, b) = (2, 4)}$ //

(4) $c = \dfrac{\log 2}{2}$



$$\int_2^4 \left(\frac{\log x}{x} - c\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\log x)^2 - cx\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{2}(\log 4)^2 - 4C - \frac{1}{2}(\log 2)^2 + 2C$$

$$= \frac{1}{2} 4(\log 2)^2 - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - 2C$$

$$= \frac{3}{2}(\log 2)^2 - 2C$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}(\log 2)^2 - \log 2}$$

$$//$$