2017 年度 入試問題

中央大学・理工学部 (センター併用)(2 月 8 日)

100 分

※ 4 題のうち，任意の 3 題を選択して解答する.

1 以下の問いに答えよ.

(1) $x > -1$ において，不等式 $\log(1+x) \leqq x$ が成り立つことを示せ.

(2) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} \leqq \log(1+x)$ が成り立つことを示せ.

(3) 自然数 n に対し，$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$ と定める．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

$\displaystyle\log a_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ と (1)(2) より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{n^4}\right) \leqq \log a_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log a_n = \frac{1}{2}$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \boxed{\sqrt{e}}$

2 N を 2 以上の自然数とし，複素数 $\alpha,\ \beta$ は $\alpha+\beta = 2N-1,\ \alpha\beta = (N+1)^2$ という関係を満たしているとする．自然数 n に対し，$C_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $C_2,\ C_3$ をそれぞれ N の式で表せ.

$\boxed{\boldsymbol{C_2 = 2N^2 - 8N - 1,\ C_3 = 2N^3 - 21N^2 + 6N + 2}}$

(2) 恒等式 $x^{n+2} + y^{n+2} = (x+y)(x^{n+1}+y^{n+1}) - xy(x^n + y^n)$ に注意して，すべての自然数 n に対し，C_n は整数であることを示せ.

$C_{n+2} = (2N-1)C_{n+1} - (N+1)^2 C_n$ と $C_1 \in Z,\ C_2 \in Z$ から明らか.

(3) $C_{n+2} + C_{n+1} + C_n$ は n で割り切れることを示せ．また，このことを用いて，C_{2017} を N で割った余りを求めよ.

以下，$\bmod N$ で

$C_{n+2} = (2N-1)C_{n+1} - (N+1)^2 C_n \equiv -C_{n+1} - C_n$ から $C_{n+2} + C_{n+1} + C_n \equiv 0$

さらに $C_1 \equiv -1,\ C_2 \equiv -1,\ C_3 \equiv 2$ から，C_n を N で割った余りは $N-1,\ N-1,\ 2,\ N-1,\ N-1,\ 2,\ \cdots$ と繰り返す．ゆえに $C_{2017} \equiv \boxed{\boldsymbol{N-1}}$

3 c を正の定数とする．$f(x) = x^2 - c$ として，曲線 $C : y = f(x)$ 上に点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ f(a_1)),\ \mathrm{P}_2(a_2,\ f(a_2))$ をとる．ただし，$\sqrt{c} < a_2 < a_1$ とする．直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ と x 軸との交点を点 $(a_3,\ 0)$ とし，点 $(a_3,\ f(a_3))$ を P_3 と定める．以下同様に，直線 $\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}$ と x 軸との交点を $(a_n,\ 0)$ とし，点 $(a_n,\ f(a_n))$ を P_n と定める．以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$ の位置関係を図に示すことにより，$\sqrt{c} < a_3 < a_2 < a_1$ が成り立つことを説明せよ.

4 以上の自然数 n に対しても，同様に $\sqrt{c} < a_n < a_{n-1}$ が成り立つ．以下ではこの不等式を用いてよい.

(2) a_n と $f(a_n)$ を $a_{n-2},\ a_{n-1}$ で表せ.

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} + c}{a_{n-1} + a_{n-2}},\ f(a_n) = \frac{(a_{n-1}^2 - c)(a_{n-2}^2 - c)}{(a_{n-1} + a_{n-2})^2}}}$$

(3) $f(a_n) < \dfrac{1}{4} f(a_{n-2})$ を示せ.

$$f(a_n) < \frac{(a_{n-1}^2 - 0)f(a_{n-2})}{(a_{n-1} + a_{n-1})^2} < \frac{1}{4} f(a_{n-2})$$

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{2k}$ を求めよ.

$0 < f(a_{2k}) < \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1} f(a_2)$ より，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} f(a_{2k}) = 0$ これと $a_{2k} > \sqrt{c}$ より，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \boxed{\sqrt{c}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上を動く点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として $x=r(t)\cos t,\ y=r(t)\sin t$ と表されているとする．ただし，$a \leqq t \leqq b$ $(0 \leqq a < b \leqq 2\pi),\ r(t)>0$ とする．時刻 t における点 P の位置を A，時刻 $t=b$ における点 P の位置を B とし，点 P が描く軌跡を C とする．原点 O と A，B を結ぶ 2 本の線分 OA，OB および曲線 C によって囲まれた図形の面積 S は公式 $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \{r(t)\}^2\,dt$ $\cdots(*)$ により与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) $a=0,\ b<\dfrac{\pi}{2}$ とし，点 P が直線 $x=1$ 上を動くとする．このとき，$(*)$ の右辺の積分を実際に計算し，その値が図形の面積と一致することを確かめよ．

$r(t)=\dfrac{1}{\cos t}$ より，$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^b \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt = \boxed{\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\tan b}}$

以下では，n を自然数とし，$r(t)=2+\cos nt$ とする．

(2) $n=8,\ a=0,\ b=2\pi$ の場合に $r(t)$ の最大・最小に注目して，曲線 C の概形をかけ．

(3) $a=0,\ b=\dfrac{\pi}{2}$ の場合に，公式 $(*)$ を用いて S を n で表せ．また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S$ を求めよ．

$$\boxed{\boldsymbol{S=\frac{9}{8}\pi+\frac{2}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\cos n\pi}{8n},\ \lim_{n\to\infty} S=\frac{9}{8}\pi}}$$

(コメント)
非常に難しい問題の並ぶ年が多いですが，今年は例年に比べるとかなり易しいセットです．それでも受験生にとっては手ごわいでしょう．

数学的には中身のしっかりした良問です．現実的なボーダーラインを考えると，大問 1 つ当たり 1 時間くらいかけてもよいわけですから，焦らずじっくりと取り組みましょう．