2016年度 入試問題

中央大学・商学部（経営・金融）B（2月13日）とおまけ

60分

1 各項が正である数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は，等式 $(S_n)^2 - \dfrac{n^3+n^2-1}{n}S_n - n - 1 = 0$ を満たしている．このとき以下の設問に答えよ．（20点）

（1）S_n を求めよ．
（2）数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $S_n = n^2 + n$　　(2) $a_n = 2n$

2 点（1，1）を通り傾き n の直線と放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ との交点をA，Bとする．このとき，以下の設問に答えよ．（20点）

（1）線分ABの長さを m を用いて表せ．
（2）Oを原点とする．△OABの面積を S とするとき，S^2 を m を用いて表せ．

(1) $\mathrm{AB} = 2\sqrt{(m^2+1)(m^2-2m+2)}$　　(2) $S^2 = (m-1)^2(m^2-2m+2)$

3 $0 < \angle \mathrm{AOB} < \dfrac{\pi}{2}$ である△OABを考える．辺OAと辺OB各々の長さを a，b とし，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を k とおく．また，辺ABを2：1に内分する点をTとする．このとき以下の設問に答えよ．（30点）

（1）ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．
（2）辺OA上に点Cを，∠OCTが $\dfrac{\pi}{2}$ となるようにとる．線分OCの長さを a と k を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　(2) $\mathrm{OC} = \dfrac{a^2+2k}{3a}$

4（商）

N を4以上の整数とする．1から N までの番号を付けた N 個のボールが袋に入っている．袋から無作為に1個のボールを取り出し，その番号を X とする．取り出したボールを袋に戻さずに，新しくボールを取り出し，その番号を Y とし，X と Y の大きいほうの数を M とする．このとき以下の設問に答えよ．（30点）

（1）$2 \leqq j \leqq N$ である整数 j に対し，$M \leqq j$ となる確率を求めよ．
（2）$2 \leqq j \leqq N$ である整数 j に対し，$M = j$ となる確率を求めよ．
（3）$N+2 \leqq k \leqq 2N-2$ である偶数 k に対し，$X+Y=k$ となる確率を求めよ．

(1) $\dfrac{j(j-1)}{N(N-1)}$　　(2) $\dfrac{2(j-1)}{N(N-1)}$　　(3) $\dfrac{2N-k}{N(N-1)}$

4（統一2月9日？）

正三角形ABCの各頂点間を動く点Pがある．Pは1秒ごとに，以下の規則に従って，他の頂点に移動するか，同じ頂点にとどまるとする．

- Pが頂点AまたはBにあるときは，同じ頂点にとどまることなく，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で他の頂点に移動する．
- 点Pが頂点Cにあるときは，確率 $\dfrac{1}{3}$ でCにとどまり，確率 $\dfrac{1}{3}$ でA，確率 $\dfrac{1}{3}$ でBに移動する．

時刻0にAにある点Pが，n 秒後にA，B，Cにある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする．以下の問に答えよ．（30点）

（1）$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ のとき，a_{n+1} および c_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n，c_n で表せ．
（2）c_4 の値を求めよ．なお，答は分数のままでよい．

(1) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{3}c_n$，$c_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{3}c_n$　　(2) $\dfrac{185}{432}$

(注) $c_n = \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$