2022 法政大 [2/5]

$\boxed{1}$

A: 1.2.3 / 4.5.6 / 7.8

B: 5.6.7 / 8.9.10

(1) (2.8).(3.7).(4.6)

$_8C_2 = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 7}{\cancel{2}} = 28$　よって $\frac{3}{28}$ アイウ

(2) (A.B)=(1.9)(2.8)(3.7)(4.6)(5.5)

よって. $\frac{5}{8\times6} = \frac{5}{48}$ エオカ

(A.B)=(5.5),(6.6),(7.7),(8.8)

よって. $\frac{4}{8\times6} = \frac{1}{12}$ キクケ

(A.B)=(6.5).(7.5),(7.6)
(8.5),(8.6),(8.7)

よって. $\frac{6}{8\cdot6} = \frac{1}{8}$ コ.サ

(A.B)=(7.5),(7.6),(7.7)
(1.7),(2.7),(3.7)(4.7)
(5.7).(6.7)

よって. $\frac{9}{8\cdot6} = \frac{3}{16}$

(3) (□,5)　□=(1.4).(2.3)

(□,6)　□=(1.5).(2.4)

(□,7)　□=(1.6).(2.5).(3.4)

(□,8)　□=(1.7)(2.6).(3.5)

(□.9)　□=(1.8)(2.7)(3.6)(4.5)

(□.10)　□=(2.8),(3.7)(4.6)

Aから2コ. Bから1コ取り出す場合の数は

$_8C_2\times6 = 4\cdot7\cdot6 = 168$

よって. $\frac{17}{168}$ ソタチツテ. $\frac{5}{17}$ トナニ

$\boxed{2}$

C: $x^2+y^2-2x-6y=0$ —— ①

$(x-1)^2+(y-3)^2=10$

中心 $P(1,3)$ アイ

① と $x^2+y^2=8$ —— ② の交点は

②-① より $2x+6y=8$

$x=4-3y$ —— ③

② に代入 $(4-3y)^2+y^2=8$

$10y^2-24y+8=0$

$(5y-2)(y-2)=0$

$y=2$ のとき $x=-2$ 不適

$y=\frac{2}{5}$ のとき $x=\frac{14}{5}$

よって $A\left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right)$ // ウエオ カキ

D: $x^2+y^2-2x+4y=0$ —— ④

$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

$Q(1,-2)$ だから

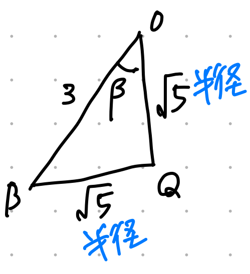
$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\frac{14}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$

よって $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{14}{5}-\frac{4}{5}=2$ // キ

$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ //

$OB=3$, $QO=QB=\sqrt{5}$ だから



$\cos\beta=\dfrac{9+5-5}{2\cdot3\cdot\sqrt{5}}$

$=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$ コサシス

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OQ}|\cos\beta$

$=3\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=\dfrac{9}{2}$ // セソ

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{100-45}}{10}=\dfrac{\sqrt{55}}{10}$ // タチツテ

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos(\alpha+\beta)$

$=2\sqrt{2}\cdot3\cdot(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=6\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{10}-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\dfrac{\sqrt{55}}{10}\right)$

$=\dfrac{9}{5}(1-\sqrt{11})$ // トナニヌ

3

$a_1 = 1_{(3)}$. $a_2 = 10_{(3)}$. $a_3 = 101_{(3)}$

$a_4 = 1011_{(3)}$. $a_5 = 10110_{(3)}$

$a_6 = 101\underbrace{101}_{アイウ}{}_{(3)}$

$a_3 = 101_{(3)} = 1 + 3\cdot 0 + 3^2\cdot 1 = \underbrace{10}_{エオ}$

$\boxed{b_n = a_{3n+3} - a_{3n}}$

$b_1 = a_6 - a_3 = \underbrace{101}_{カ⑤}\underbrace{000}_{キ⓪}{}_{(3)}$

$b_1 = 3^3\times 1 + 3^5\times 1 = (1+3^2)\cdot 3^3$
$= 10\cdot 3^3$

$c_1 = \underbrace{10}_{クケ}$. $d_1 = \underbrace{3}_{コ}$

$a_{3n} = \underbrace{101}_{1}\ \underbrace{101}_{2}\cdots\underbrace{101}_{n}$

$a_{3n+3} = \underbrace{101}_{1}\ \underbrace{101}_{2}\cdots\underbrace{101}_{n}\ \underbrace{101}_{n+1}$

$b_n = 101\ \underbrace{000}_{1}\ \underbrace{000}_{2}\cdots\underbrace{000}_{n}$

$= 3^{3n} + 3^{3n+2} = \underbrace{10}_{サシ}\cdot 3^{\underset{ス}{3n}}$

$a_{3n} = a_3 + b_1 + \cdots + b_{n-1}$

$= 10 + \sum_{k=1}^{n-1} 10\cdot 3^{3k}$

$= 10 + \dfrac{10\cdot 3^3\{(3^3)^{n-1} - 1\}}{3^3 - 1}$

$= \dfrac{5}{\underset{セソ}{13}}(3^{3n} - 1)$

$\boxed{a_{3n} > 3^{40}}$

$\dfrac{5}{13}\times 3^{3N} > 3^{40}$ —— ⅰ

$3^{40} \geqq \dfrac{5}{13}(3^{3N} - 1)$ —— ⅱ

$5\times 3^{3N} > 13\times 3^{40} \geqq 5\times(3^{3N} - 1)$

13×3^{40}は3の倍数だから

$13\times 3^{40} = 5\times 3^{3N} - \underbrace{3}_{チ}$ —— ⅲ

$3^{40} \geqq \dfrac{5}{13}\times\{3^{3(A-1)}\} > a_{3(A-1)}$

$m \leqq \log_3\dfrac{13}{5} < m+1$

$3^m \leqq \dfrac{13}{5} < 3^{m+1}$

$m = \underbrace{0}_{ツ}$

$40 \geqq \log_3\dfrac{13}{5} + 3(A-1)$

$43 - 3A \geqq \log_3\dfrac{13}{5}$

$0 < 43 - 3A \leqq 1$ より

$A = \underbrace{14}_{テト}$

$\boxed{6}$ $C: y=\sqrt{x^2+1}$ —— (i)

C上の点 $x^2-y^2=-1$ —— (ii)

$y>0$

$l: y=\frac{1}{2}x+1$

$x^2-\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2=-1$

$\frac{3}{4}x^2-x=0 \qquad x=0,\ \frac{4}{3}$

$p=\underset{ア}{0},\quad q=\frac{4}{3}$ イウ

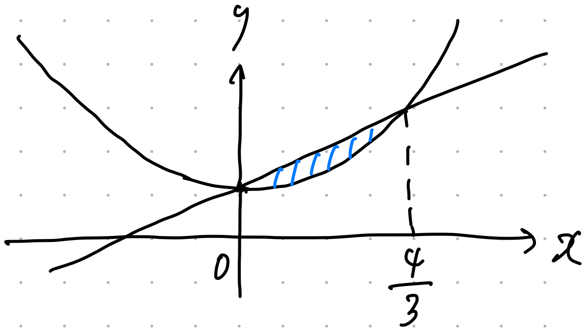
$t=\sqrt{x^2+1}+x$ —— (iii)

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\infty$ ⑧ エ

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}=0$ ⓪ オ



$$S=\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{2}x+1-\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx-\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$x=t-y$ より

$(t-y)^2-y^2=-1 \Rightarrow y=\frac{t^2+1}{2t}$ キカ

また

$x=t-\frac{t^2+1}{2t}=\frac{t^2-1}{2t}$ クケ —— (iv)

$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2+1}{2t^2}$ コサシ

$$I=\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_1^3\frac{t^2+1}{2t}\times\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$

x	$0\to\frac{4}{3}$
t	$1\to3$

$$=\int_1^3\frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}\,dt$$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{4}t+\frac{1}{2t}+\frac{1}{4}t^{-3}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{8}t^2+\frac{1}{2}\log|t|-\frac{1}{8}t^{-2}\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{8}(9-1)+\frac{1}{2}\log3-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}-1\right)$$

$$=\frac{10}{9}+\frac{1}{2}\log3$$

$$=\frac{10}{9}+\log\sqrt{3}$$

また $\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+x\right]_0^{\frac{4}{3}}$

$$=\frac{4}{9}+\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$$

よって

$$S=\frac{2}{3}-\log\sqrt{3}$$

$\boxed{7}$ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ $\begin{cases} x = \sin 2\theta \\ y = \sin 3\theta \end{cases}$ — ①

⓪ ①

$0 \le x \le 1$ アイ

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において

$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos 2\theta$ ウ, $\frac{dy}{d\theta} = 3\cos 3\theta$ エ

$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos 3\theta}{2\cos 2\theta} = 0$ のとき

$\cos 3\theta = 0$, $\cos 2\theta \neq 0$

$3\theta = \frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{6}$

よって $x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ オ

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ において

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin\frac{3}{6}\pi = 1$ ① カ

$\theta = \frac{\pi}{6}$ の前後で $\frac{dy}{dx}$ が $+ \to -$

に変わるから 極大かつ最大 ⓪ キ

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{d\theta} = \frac{-9\sin 3\theta \cdot 2\cos 2\theta + 4\sin 2\theta \cdot 3\cos 3\theta}{4\cos^2 2\theta}$$

$$= \frac{12\cos 3\theta \sin 2\theta - 18\sin 3\theta \cos 2\theta}{4\cos^2 2\theta}$$

よって

$$f''(x) = \frac{12\cos 3\theta \sin 2\theta - 18\sin 3\theta \cos 2\theta}{4\cos^2 2\theta \cdot 2\cos 2\theta}$$

$$= \frac{6\cos 3\theta \sin 2\theta - 9\sin 3\theta \cos 2\theta}{4\cos^3 2\theta}$$ //

クケ

$g(\theta) = 6\cos 3\theta \sin 2\theta - 9\sin 3\theta \cos 2\theta$

$g'(\theta) = 6(-3\sin 3\theta \sin 2\theta + 2\cos 3\theta \cos 2\theta)$
$\quad - 9(3\cos 3\theta \cos 2\theta - 2\sin 3\theta \sin 2\theta)$

$= -15\cos 3\theta \cos 2\theta$

$0 \le 2\theta \le \frac{\pi}{2}$ より $0 \le \cos 2\theta \le 1$

$0 \le 3\theta \le \frac{3}{4}\pi$ より $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \cos 3\theta \le 1$

よって $g'(\theta)$ は $+$ にも $-$ にもなる。③ コ

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$g'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$g(\theta)$	0	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$-3\sqrt{2}$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -9 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

$g(0) = 0$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\sqrt{2}$

よって $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき $g(\theta) < 0$ ② サ

したがって $f''(\theta) < 0$ ② シ

上に凸 ① ス

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3\theta \cdot 2\cos 2\theta \, d\theta$$

x	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 5\theta + \sin\theta)\, d\theta$

$= \left[-\frac{1}{5}\cos 5\theta - \cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\frac{1}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$

$= \frac{2}{5}(3 - \sqrt{2})$ // セソタ