模範解答

【Ⅰ】

(1) [a] 7

(2) [b] $0 \leqq \theta < \pi/3$, $5\pi/3 < \theta < 2\pi$

(3) [c] $(1/3, 0)$

(4) [d] $9/25$

【Ⅱ】

(1)

円 C の方程式を変形すると

$(x-2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + 9 = 0$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

よって、

中心の座標 (2, 3) 、半径 2

(2)

円 C の中心 (2, 3) と直線 l: $ax - y + 1 = 0$ の距離を d とすると、

$d = |2a - 3 + 1| / \sqrt{a^2 + (-1)^2}$

$\quad = |2a - 2| / \sqrt{a^2 + 1}$

円と直線が異なる2点で交わる条件は $d < r$（半径）であるから

$|2a - 2| / \sqrt{a^2 + 1} < 2$

両辺を2で割って分母を払うと

$|a - 1| < \sqrt{a^2 + 1}$

両辺ともに正であるから、2乗して

$(a - 1)^2 < a^2 + 1$

$a^2 - 2a + 1 < a^2 + 1$

$-2a < 0$

よって、$a > 0$

(3)

円の中心から直線に下ろした垂線と弦により作られる直角三角形に着目する。

切り取る線分の長さ（弦の長さ）が $2\sqrt{2}$ であるから、直角三角形の斜辺は円の半径 2、底辺の半分は $\sqrt{2}$ となる。

三平方の定理より、中心と直線の距離 d は

$d^2 + (\sqrt{2})^2 = 2^2$

$d^2 = 2$

$d = \sqrt{2}$ （$d>0$より）

(2)より $d = |2a - 2| / \sqrt{(a^2 + 1)}$ であるから

$|2a - 2| / \sqrt{(a^2 + 1)} = \sqrt{2}$

両辺を2乗して

$4(a-1)^2 / (a^2 + 1) = 2$

$2(a^2 - 2a + 1) = a^2 + 1$

$a^2 - 4a + 1 = 0$

解の公式により

$a = 2 \pm \sqrt{3}$

これらはともに(2)で求めた範囲 $a > 0$ を満たす。

よって、$a = 2 \pm \sqrt{3}$

【Ⅲ】

(1)

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4a$ を x で微分すると

$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$

$f'(x) = 0$ とすると、$x = 0, 2a$

$a > 0$ より、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4a$	$\searrow$	$-4a^3+4a$	$\nearrow$

極大値は $f(0) = 4a$

極小値は $f(2a) = (2a)^3 - 3a(2a)^2 + 4a = -4a^3 + 4a$

よって

極大値 $4a$（$x=0$ のとき）

極小値 $-4a^3 + 4a$（$x=2a$ のとき）

(2)

3次関数のグラフが x 軸と異なる3点で交わる条件は

（極大値）×（極小値）< 0

である。

$4a(-4a^3 + 4a) < 0$

$16a^2(1 - a^2) < 0$

$a > 0$ より $16a^2 > 0$ であるから

$1 - a^2 < 0$

$a^2 > 1$

$a > 0$ を考慮して、

$a > 1$

(3)

$a = 1$ のとき、$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

(1)より極小値は $f(2) = 0$ となるため、グラフは $x=2$ で x 軸に接する。

因数分解を行うと

$x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2 (x + 1)$

よって、x 軸との交点は $x = -1, 2$

$x \geqq 0$ におけるグラフの概形より、求める面積 S は $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲の定積分となる。

$S = \int_{0}^{2} (x^3 - 3x^2 + 4)\, dx$

$= \left[x^4/4 - x^3 + 4x \right]_{0}^{2}$

$= (16/4 - 8 + 8) - 0$

$= 4$

よって、$S = 4$