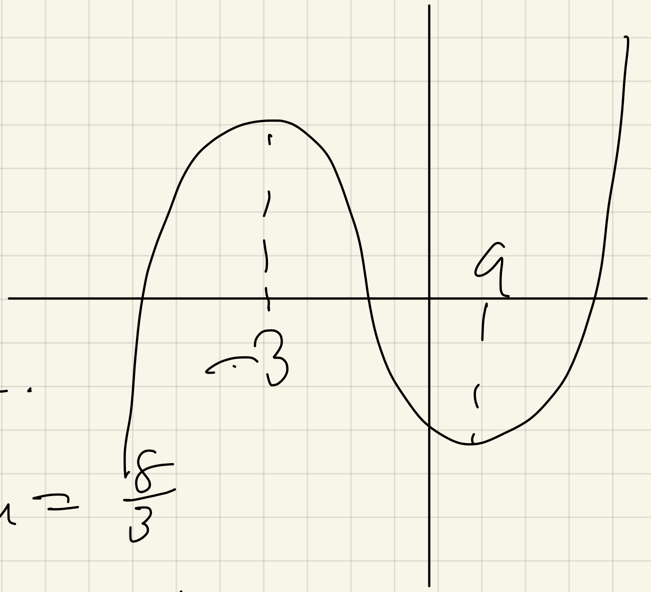
(3)




$y' = x^2 + (3-a)x - 3a$

$= (x+3)(x-a)$

$y' = 0$ のとき $x = -3, a.$

$-9 + \frac{27-9a}{2} + 9a - b = \frac{8}{3}$

$\cancel{-54}\ \cancel{+81} - 27a + 54a - 6b = 16$

$27$

$27a - 6b = -11$

$\frac{1}{3}a^3 + \frac{3a^2 - a^3}{2} - 3a^2 - b = -8$

$2a^3 + 9a^2 - 3a^3 - 18a^2 - 6b = -48$

$-a^3 - 9a^2 - 6b = -48$

$a^3 + 9a^2 + 27a + 11 = +48$

$a^3 + 9a^2 + 27a - 37 = 0$

$(a-1)(a^2 + 10a + 37) = 0$

$\therefore a = 1$

$27 - 6b = -11$

$38 = 6b$

$b = \frac{19}{3}$

$a = 1, b = \frac{19}{3}$

(2) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

$y = 5x + k$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{19}{3} - 5x - k$ とおいて

$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x - \frac{19}{3} - k.$

$f'(x) = x^2 + 2x - 8$

$f'(x) = 0$ とおいて $x = 2, -4$

条件は $f(2) \times f(-4) < 0$ であり

$f(x) = (x^2 + 2x - 8)\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) - 6x - \frac{11}{3} - k$

なので.

$\left(-6 \cdot 2 - \frac{11}{3} - k\right)\left(-6 \cdot (-4) - \frac{11}{3} - k\right) < 0$

$(3k + 47)(3k - 61) < 0$

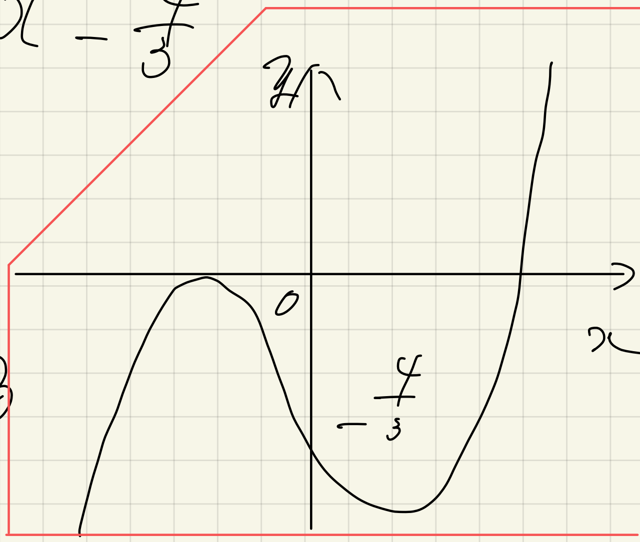
$\therefore \quad \underline{-\frac{47}{3} < k < \frac{61}{3}}$

$y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-\frac{19}{3}$ —— ①

$l:\ y=mx-5$

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-\frac{19}{3}-mx+5$ とすると

$=\frac{1}{3}x^3+x^2-(3+m)x-\frac{4}{3}$




lと①のグラフの共有点の数は
$y=g(x)$ の $x$ の実数解の個数と
対応するため、lと①が異なる
2個の共有点をもつのは、
$y=g(x)$ が右図のようになるときである

$g'(x)=x^2+2x-(3+m)$

$g'(x)=0$ のとき $x=-1\pm\sqrt{1+m+3}$

$=-1\pm\sqrt{m+4}$

グラフより $g(-1-\sqrt{m+4})=0$ となる

よって $g(x)=\frac{1}{3}\left[\{x^2+2x-(m+3)\}(x+1)-2(m+4)x+(m-1)\right]$
より

$g(-1-\sqrt{m+4})=-2(m+4)(-1-\sqrt{m+4})+(m-1)=0$

$\therefore\ m=-3$

$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

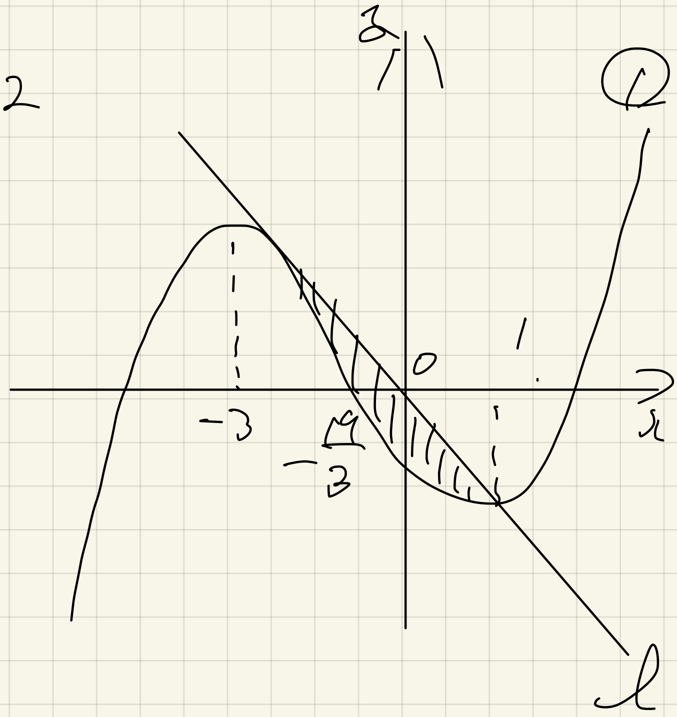
$l: y = -3x - 5$

$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}$

$g(x) = 0$ とおくと　$x = 1, -2$

求める面積 S は

右図の斜線部分




$$\int_{-2}^{1} \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{4}{3}\right) dx$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2-1)^4$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot 81 = \frac{9}{4}$$