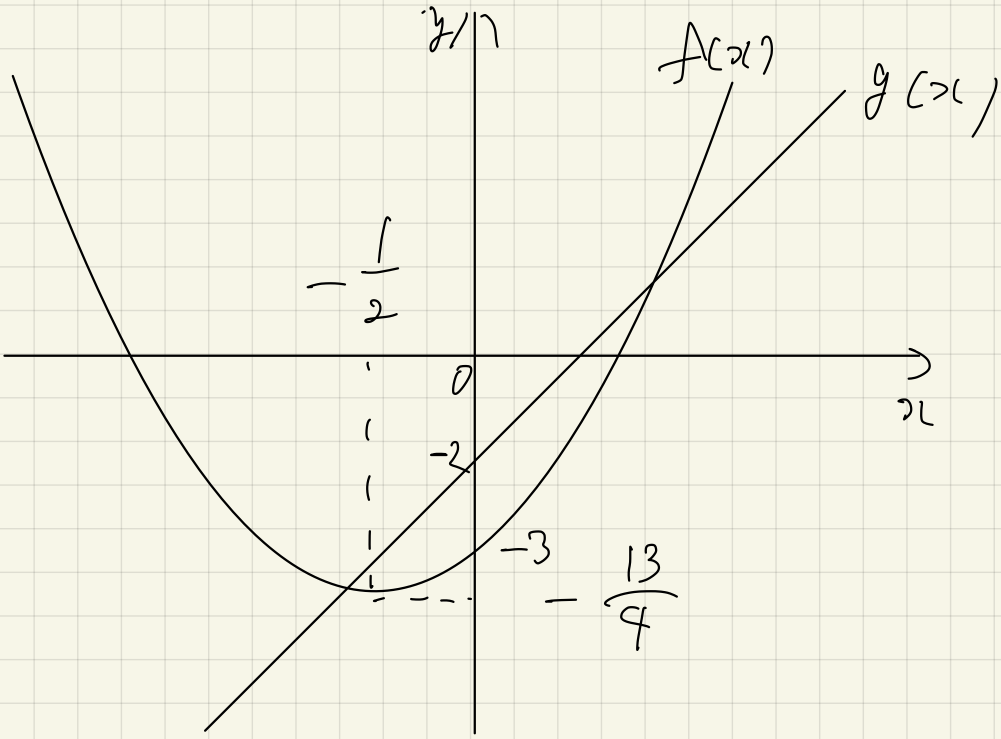
I

(1) $f(x) = x^2 + x - 3$, $g(x) = 4x - 2$

$f(x) = 0$ と解く $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$



$x^2 + x - 3 = 4x - 2 \iff x^2 - 3x - 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$3 < \sqrt{13} < 4$ より

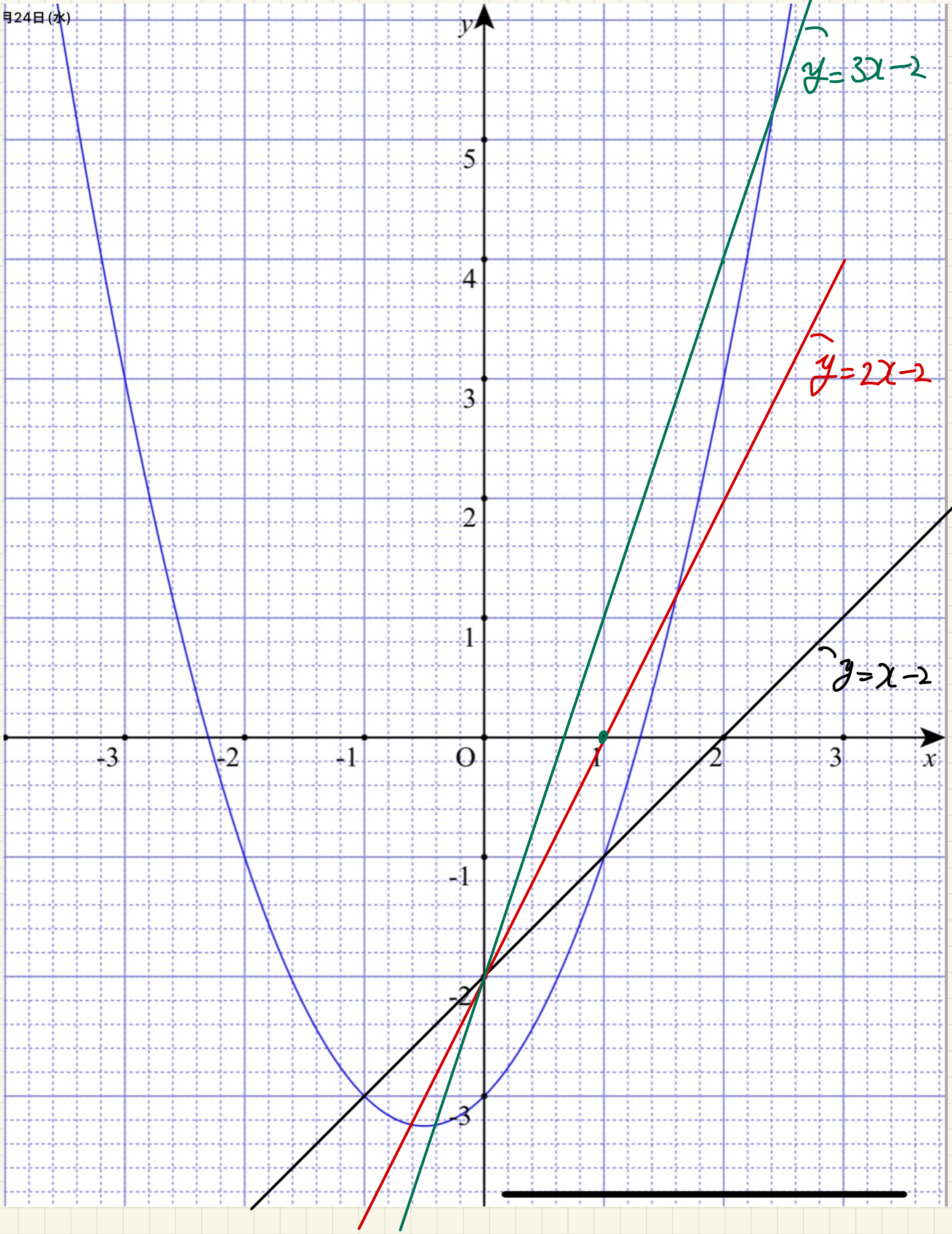
$-\frac{1}{2} < x < 0$, $3 < x < \frac{7}{2}$

$\therefore\ m = 0,\ M = 3$

また $f(0) = -3,\ g(0) = -2$ より ウは 0 2

$f(3) = 9,\ g(3) = 10$ より エは 02

(2)(ii) $f(x) = x^2 + x - 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{13}{4}$



左図より

$n=1$ のとき $a_n=0$

$n=2$ のとき $a_n=0$

$n=3$ のとき $a_n=1$

$a_n = a\cdot n^3 + bn^2 + cn$ とすると

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 8a+4b+2c=0 \\ 27a+9b+3c=1 \end{cases}$$

これを解くと $a=\frac{1}{6}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$

よって $a_n = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$ —— ①

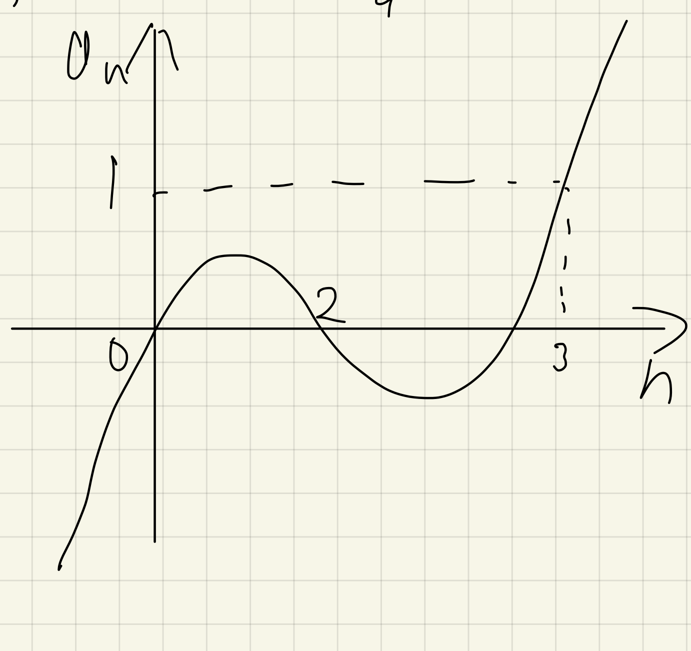
$\frac{da_n}{dn} = \frac{1}{2}n^2 - n + \frac{1}{3}$ $\qquad -\frac{1}{9}n+\frac{1}{9}$

$\frac{da_n}{dn} = 0$ とすると $n = 1\pm\sqrt{3}$

①に代入すると $a_{1+\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{9}$, $a_{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

よって $a_{1+\sqrt{3}}, a_{1-\sqrt{3}} < 0$

また a_n は右図のようになる



したがって $a_n>0$ となる

最小の n の値は

$n=3$

(ii) i) より $a_n = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$

$$a_{10} = \frac{1000}{6} - \frac{100}{2} + \frac{10}{3}$$

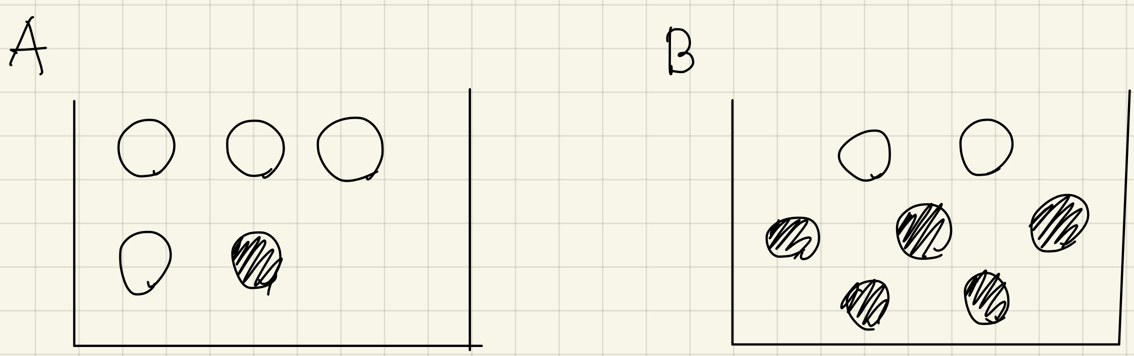
$$= \frac{1000 - 300 + 20}{6} = \frac{720}{6}$$

$$= \underline{120}$$

(iii) $a_{23} = 1771$ $a_{24} = 2124$ より

$a_n > 2022$ となる n の最小値は $n = 24$ である

Ⅱ



(1)

$$\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2} = \frac{4\times3}{5\times4} = \frac{3}{5}$$

(2) 少なくとも1つが赤

⇔ 2つとも白玉の事象の余事象

$$1 - \frac{{}_2C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{\frac{7\times6}{2}} = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

(3)

(i) $$\underbrace{\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}}_{A} + \underbrace{\frac{7}{10}\times\frac{1}{{}_7C_2}}_{B}$$

$$= \frac{9}{50} + \frac{1}{30} = \frac{27+5}{150} = \frac{32}{150} = \frac{16}{75}$$

(ii) 取り出した玉の少なくとも1個が赤玉

⇔ 2つとも白玉の事象の余事象

よって $1 - \frac{16}{75} = \frac{59}{75}$

袋Bから少なくとも1個赤玉を出す確率は

$$\frac{7}{10}\times\frac{20}{21} = \frac{2}{3}$$

よって求める条件付き確率は

$$\frac{2}{3} \div \frac{59}{75} = \frac{2}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{75}^{25}}{59} = \frac{50}{59}$$

(4) 取り出した玉が2つとも白玉である確率は、

$$(1-s)\times\frac{3}{5}+s\times\frac{1}{21}=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}s+\frac{1}{21}s$$

$$=\frac{3}{5}-\frac{58}{105}s$$

袋Aを選んで2つとも白玉である確率は

$$(1-s)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}s$$

$$\therefore\ a=\frac{\frac{3}{5}(1-s)}{\frac{3}{5}-\frac{58}{105}s}=\frac{3(1-s)}{3-\frac{58}{21}s}$$

$$=\frac{63(1-s)}{63-58s}$$

$$\frac{\overset{7}{\cancel{63}}(1-s)}{63-58s}\geqq\frac{\cancel{9}}{10}$$

$$70(1-s)\geqq 63-58s$$

$$7\geqq 12s$$

$$\therefore\ s\leqq\frac{7}{12}$$

取り出した玉の少なくとも1つが赤玉である確率は

$$1-\left(\frac{3}{5}-\frac{58}{105}s\right)=\frac{2}{5}+\frac{58}{105}s$$

袋Bを選んで少なくとも1つが赤玉である確率は

$$s\times\frac{20}{21}=\frac{20}{21}s$$

$$b=\frac{\frac{20}{21}s}{\frac{2}{5}+\frac{58}{105}s}=\frac{\frac{100}{21}s}{2+\frac{58}{21}s}$$

$$=\frac{100s}{42+58s}$$

$$u = \frac{100S}{42 + 58S} \geqq \frac{1}{4}$$

$$400S \geqq 42 + 58S$$

$$342S \geqq 42$$

$$S \geqq \frac{42}{342} = \frac{7}{57}$$

以上より $\displaystyle \underline{\frac{7}{57} \leqq S \leqq \frac{7}{12}}$

Ⅲ　A(3, 4, 3), B(−2, 2, 6)

(1) 点A, B の x, z 平面における直線の式は

$$z = \frac{3-6}{3+2}(x-3)+3$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} + 3$$

$z=0$ のとき

$$\frac{3}{5}x = \frac{9+15}{5}$$

$$x = 8$$

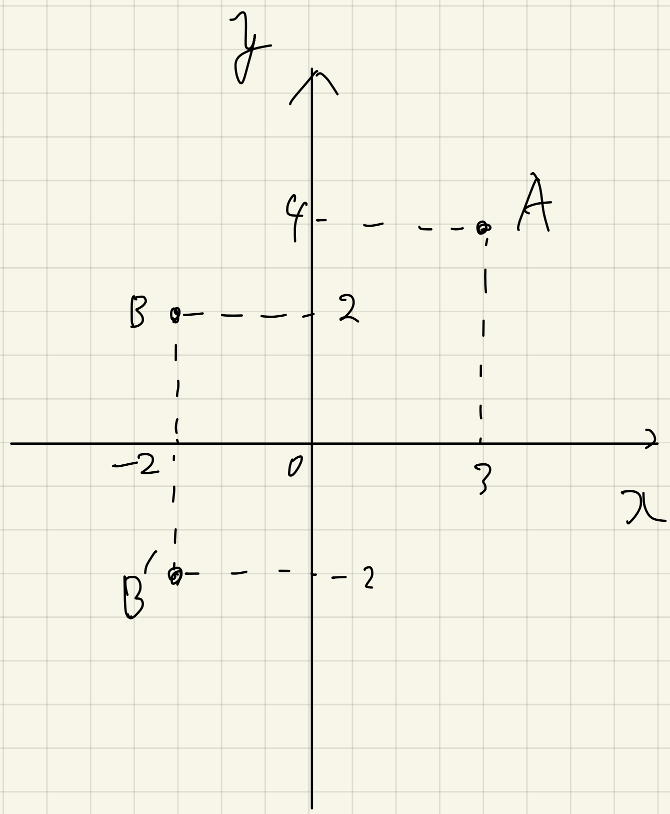
$y\,z$ 平面における直線の式は

$$z = \frac{3-6}{4-2}(y-4)+3$$

$$= -\frac{3}{2}y + 6 + 3$$

$z=0$ のとき　$y=6$

$\therefore$ $\underline{(8, 6, 0)}$

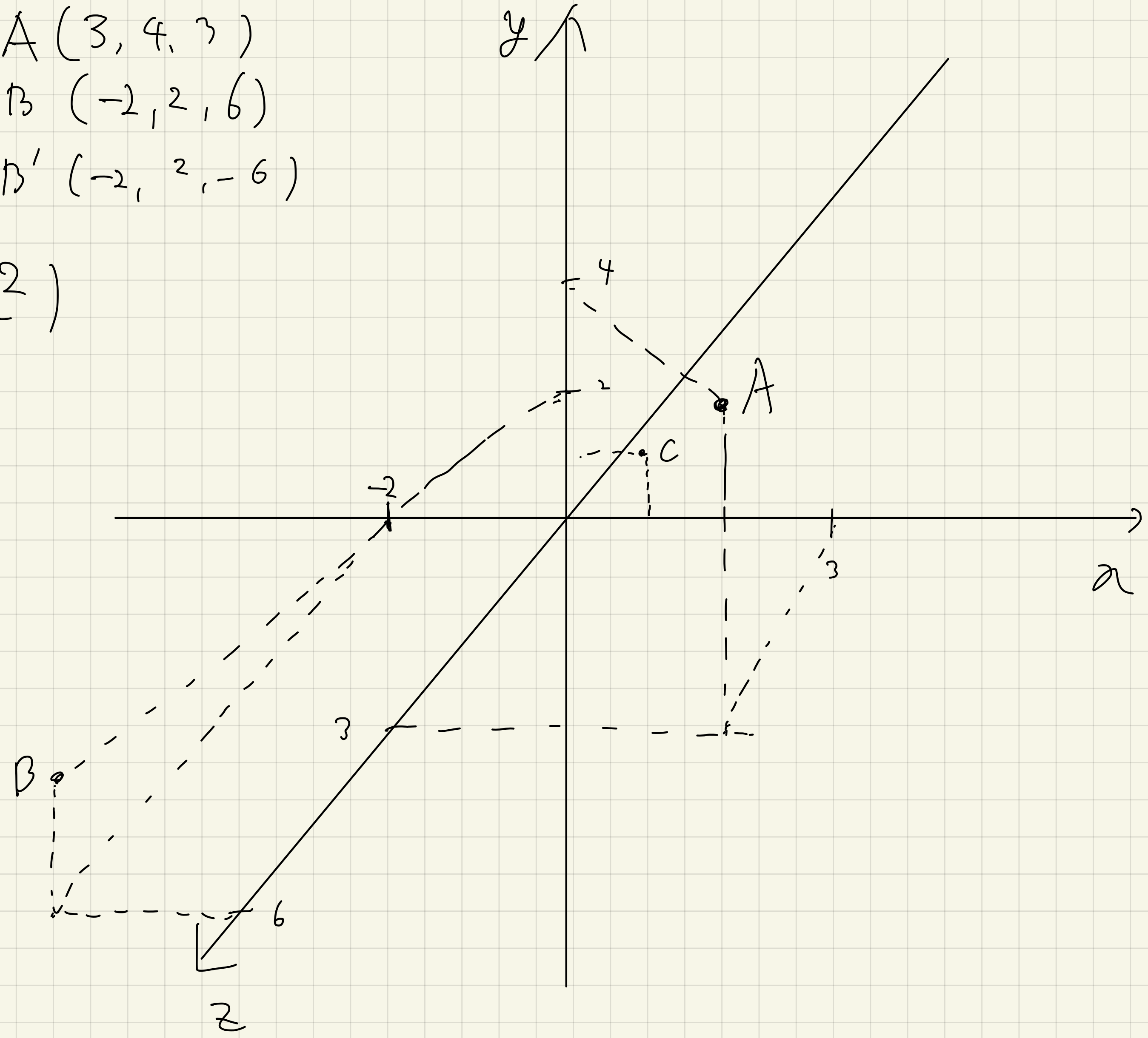


$A(3, 4, 3)$

$B(-2, 2, 6)$

$B'(-2, 2, -6)$

(2)



$B'(-2,\ 2,\ -6)$ とおく

$$(AC + CB)_{min} = AC + CB'$$

$$= \sqrt{(3+2)^2 + (4-2)^2 + (3+6)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 4 + 81}$$

$$= \sqrt{110} \qquad -\frac{6}{5} + \frac{20}{5}$$

点Aと点B′の式はそれぞれ

xy平面 : $y = \frac{4-2}{3+2}(x-3) + 4 = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} + 4$

xz平面 : $x = \frac{3+2}{3+6}(z-3) + 3 = \frac{5}{9}z - \frac{5}{3} + 3$

yz平面 : $y = \frac{4-2}{3+6}(z-3) + 4 = \frac{2}{9}z - \frac{2}{3} + 4$

$z=0$ のとき

$x = -\frac{5}{3}+3 = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{2}{3}+4 = \frac{10}{3}$

よって $C\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ なので…

$|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{25}{9} + \frac{4}{9} + 9 = \frac{29+81}{9} = \frac{110}{9}$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = 25+4+9 = 38$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{25}{3} + \frac{4}{3} - 9 = \frac{29}{3} - \frac{27}{3} = \frac{2}{3}$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{110}{9}\times 38 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{2}\sqrt{464}$

$= \frac{1}{2}\times 4\sqrt{29} = 2\sqrt{29}$

(3) 条件より点D$(5, -1, d)$とおける

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2, -5, d-3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-5, -2, 3)$$

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = 4 + 25 + (d-3)^2 = (d-3)^2 + 29$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 38$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -10 + 10 + 3d - 9 = 3d - 9$$

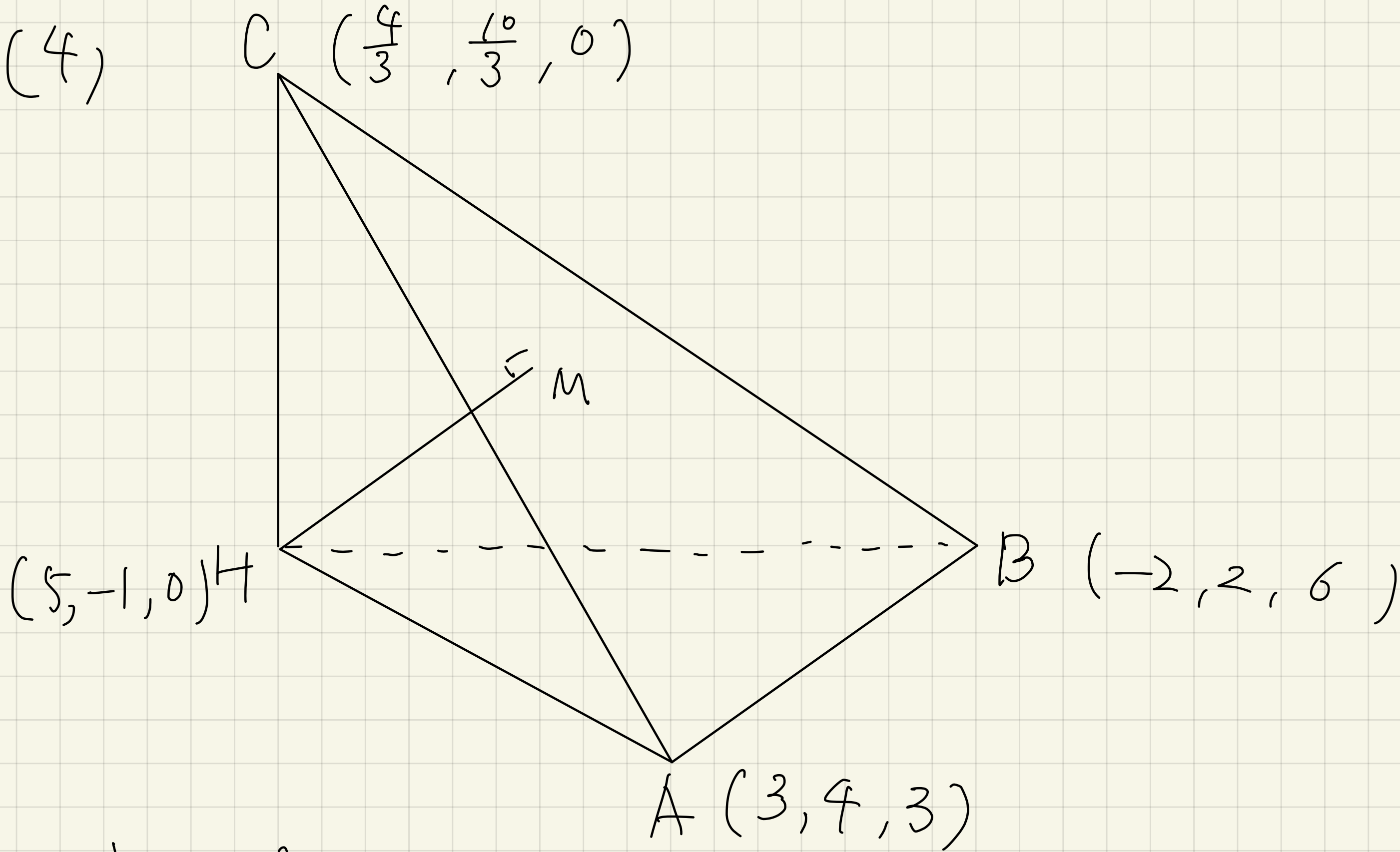
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{38(d-3)^2 + 29 \cdot 38 - (3d-9)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{38(d-3)^2 - 9(d-3)^2 + 1102}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{27(d-3)^2 + 1102}$$

より $d = 3$ のとき Sは min $\dfrac{\sqrt{1102}}{2}$ をとる

(4)



$\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AH} = \vec{h}$ とすると

$\vec{b} = (-5, -2, 3)$, $\vec{c} = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -3\right)$

$\vec{h} = (2, -5, -3)$

より $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{25}{3} + \frac{4}{3} - 9 = \frac{2}{3}$

$\vec{h} \cdot \vec{c} = 9$, $\vec{h} \cdot \vec{b} = -9$

また $\vec{AM} = s\vec{b} + t\vec{c}$ とおけて,

また $\vec{HM} \perp \vec{AC}$, $\vec{HM} \perp \vec{AB}$ より

$$\vec{HM} \cdot \vec{AC} = (\vec{AM} - \vec{AH}) \times \vec{AC}$$

$$= (s\vec{b} + t\vec{c} - h) \cdot \vec{c}$$

$$= \frac{2}{3}s + \frac{110}{9}\vec{c} - 9 = 0$$

$$\vec{HM} \cdot \vec{AB} = (\vec{AM} - \vec{AH}) \cdot \vec{AB}$$

$$= (s\vec{b} + t\vec{c} - h) \cdot \vec{b}$$

$$= 38s + \frac{2}{3}t + 9 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}s + \frac{110}{9}t - 9 = 0 \\ 38s + \frac{2}{3}t + 9 = 0 \end{cases}$$

これを解くと $s = -\frac{1}{4}$, $t = \frac{3}{4}$

よって $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{HM} = (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AH}) = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c} - \vec{h}$

$$|\overrightarrow{HM}|^2 = \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{9}{16}|\vec{c}|^2 + |\vec{h}|^2 - 2\cdot\frac{3}{16}\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\cdot\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{h} - 2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}\cdot\vec{h}$$

$$= \frac{1}{16}\,38 + \frac{9}{16}\cdot\frac{110}{9} + 38 - 2\cdot\frac{3}{16}\times\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot(-9) - 2\cdot\frac{3}{4}\cdot 9$$

$$= \frac{37}{4} + 38 - \frac{1}{4} - \frac{9}{2} - \frac{27}{2}$$

$$= 9 + 38 - 18 = 29$$

以上より求める体積Vは

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times |\overrightarrow{HM}|$$

$$= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{29} \times \sqrt{29}$$

$$= \frac{2}{3} \times 29 = \frac{58}{3}$$