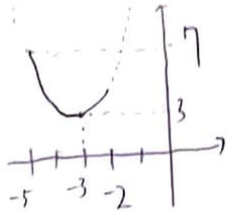
[I]

[1](1) $f(x)$ について.

$f(x) = x^2+6x+12$
$= (x+3)^2+3$

よって 以下のようなグラフとなる.



したがって

最小値は $f(-3)=\underline{3}$ ア

最大値は $f(-5)=\underline{7}$ イ

(2)

$x^2+(2a+4)x+3a^2-12=0$
の判別式 D について, $D>0$ であればよい。

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-(3a^2-12)>0$

$2a^2-4a-16<0$

$(a-4)(a+2)<0$

$\therefore\ \underline{-2}<a<\underline{4}$ ウ,エ オ

[2] (1) $\begin{cases}3a+2b=9\\2ab=3\end{cases}$ である.

$(3a+2b)^2=9a^2+4b^2+12ab$ であるから

$9a^2+4b^2=9^2-6\cdot3=\underline{63}$ カ,キ

また $(3a+2b)^3=27a^3+8b^3+3(3a+2b)(6ab)$

よって. $27a^3+8b^3=9\cdot9^2-3\cdot9\cdot3\cdot3$

$=9\cdot9^2-3\cdot9^2=6\cdot9^2$

このことから. $27a^3+8(1-15a^3)b^3$

$=27a^3+8b^3-15\cdot8a^3b^3$

$=6\cdot9^2-15\cdot3^3=6\cdot9^2-5\cdot9^2=9^2=\underline{81}$ ク,ケ

(2) $x^2+17xy+72y^2-x-15y-42$
$=(x+ay+b)(x+cy+d)$
と因数分解できるとする.

このとき. $\begin{cases}bd=-42 & (\text{定数項})\\ b+d=-1 & (x\text{の係数})\end{cases}$

かつ. $\begin{cases}ac=72 & (y^2\text{の係数})\\ a+c=17 & (xy\text{の係数})\end{cases}$

かつ. $ad+bc=-15$ (yの係数)

b と d について.

$(b,d)=(6,-7),(-7,6)$.

a と c について.

$(a,c)=(9,8),(8,9)$

が考えられる。

このとき. $(a,b,c,d)=(9,6,8,-7)$

が, $ad+bc=-15$ を満たす。

よって. $\underline{9,6,8,7}$ コ,サ,シ,ス.

[3]

(1) 女子3人を1かたまりとみなす。

男(女女女)男男男

5つの並び替えのそれぞれの場合に、
3つの並び替えの場合がある。

よって、$5!3! = 5\cdot 4\cdot(3\cdot 2)^2$
$= \underline{720}$ セ,ソ,タ

(2) 男子で区切られた空間に女子を配置する。

○男○男○男○男○

○を5つとって3つ並べるそれぞれの場合に、
4つの並び替えを考える。

よって、$_5P_3\cdot 4! = 5\cdot(4\cdot 3)^2\cdot 2$
$= 60\cdot 24 = 1200+240$
$= \underline{1440}$ チ,ツ,テ,ト

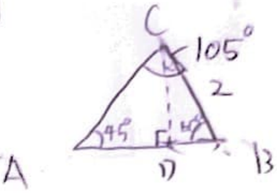
(3) 余事象(女子が2人とも両端にくる)場合を考える。

女 男 女 男男男 女

5つの並び替えのそれぞれの場合に
両端の女子の組み合わせ,そして,
その並び方の場合の数を考える。

よって、$5!\cdot 3\cdot 2 = 5!3!$
これを、全体の場合の数$7!$から引く
よって、$7! - 5!3! = 5!(7\cdot 6 - 3\cdot 2)$
$= 120\cdot(36)$
$= 3600 + 720$
$= \underline{4320}$ ナ,ニ,ヌ,ネ

[4]



正弦定理より、

$$\frac{CA}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$CA = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{2},$$

ABについて、
CからABに垂線をひく。
直角三角形CDBについて、
$BD = 2\cdot\cos 60^\circ = 1$ (∵三角比の定義)
$CD = 2\cdot\sin 60^\circ = \sqrt{3}$
また△ACDはAD=DCの直角二等辺三角形。
よって、$AD = \sqrt{3}$
よって、$AB = \underline{1+\sqrt{3}}$ ハ,ヒ

別解

$\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ)$
$= \sin 45^\circ\cos 60^\circ + \cos 45^\circ\sin 60^\circ$
$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

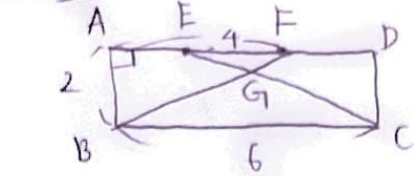
正弦定理より、

$$\frac{AB}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$AB = \frac{\cancel{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\cancel{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \underline{1+\sqrt{3}}$$ ハ,ヒ

[Ⅱ]



(1)

面積の公式より、

$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BF\cdot \sin\angle ABF = 4$

$AB=2$,

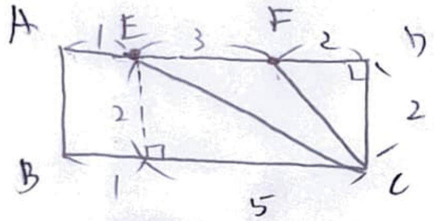
$BF=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$ より、

$\sin\angle ABF = \frac{4\cdot 2}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ア,イ,ウ

(2) △ECF=3 のとき、

$\frac{1}{2}\cdot EF\cdot 2 = 3$ (三角形の面積)

よって、EF=3



(1)と同様に、

$\frac{1}{2}\cdot EC\cdot FC\cdot \sin ECF = 3$,

三平方の定理より、

$EC = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$FC = 2\sqrt{2}$

よって、$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\sin ECF = 3$

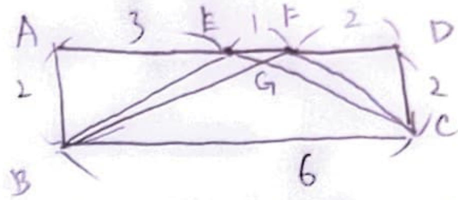
$\sin ECF = \frac{3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{58}} = \frac{3\sqrt{58}}{58}$ エ,オ,カ,キ,ク

(3)

△EBCF=7 のとき、

$(EF+6)\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 7$ (台形の面積)

よって、EF=1.



(ベクトル使います。他のやり方わかりません。)

$\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{AD}=\vec{d}$ とする。

$\vec{AG}$について、実数s, tを用いて、

①: $\vec{AG} = \vec{AF} + s\vec{FB}$

$= \frac{2}{3}\vec{d} + s(-\frac{2}{3}\vec{d}+\vec{b})$

$= s\vec{b} + (\frac{2}{3}-\frac{2}{3}s)\vec{d}$

②: $\vec{AG} = \vec{AE} + t\vec{EC}$

$= \frac{1}{2}\vec{d} + t(\frac{1}{2}\vec{d}+\vec{b})$

$= t\vec{b} + (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t)\vec{d}$

とかける。

①及び②のベクトルは等しい。

よって $\begin{cases} s=t \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}s = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}t \end{cases}$,

これを解き、$s=t=\frac{1}{7}$

したがって、BG:GF=6:1.

また、△BFC$=6\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=6$

さらに、△BFC$\times\frac{1}{7}=$△GFCなので、

△GFC$=\frac{6}{7}$

ここで、(1),(2)と同様に、面積の公式から、

$\frac{1}{2}\cdot GC\cdot GF\cdot\sin\angle FGC = \frac{6}{7}$,

ここで、$GC = EC\cdot\frac{6}{7} = \sqrt{3^2+2^2}\cdot\frac{6}{7} = \frac{6\sqrt{13}}{7}$,

$GF = BF\times\frac{1}{7} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$ を代入し、

$\sin\angle FGC = \frac{6\cdot 2\cdot 7^2}{7\cdot 2\cdot 6\sqrt{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{65}$ ケ,コ,サ,シ,ス

[III]

(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$ より、

$ab-6a-6b=0$

$(a-6)(b-6)=36$, よって

$(a-6)$, $(b-6)$ に、36の約数が割り当てられる。

36の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

で、9個ある。この内 $(a-6)$, $(b-6)$

となる組を考えるて、6以外の約数のペアは、

(4つの組み合わせ) × ($a-6$, $b-6$ の入れ替え)

が求める組の数となり、

約数6は1通りのみなので

$4\times2+1=\underline{9}$ ア

(2)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{540}$ より、

$(a-540)(b-540)=540^2$

(1)と同様に考える。540^2 の約数の数は、

$540^2=(2^2\cdot3^3\cdot5)^2=2^4\cdot3^6\cdot5^2$ より、

$5\times7\times3=105$ コ

この内、540を除いた104コについては

52組 , 540は1組

よって、$52+1=\underline{53}$ イ,ウ.