明治理工「た」物理 解答速報

※ ほぼGemini 3 Pro Previewに解かせたのを確認し修正しています。正確性については一切保証しません。また、大学とは一切関係ない個人が作成したものです。

※ 私がAしか解かなかったので他の大問の解答作成の予定はありません。

A 力学

1. 最初の円運動と落下（[ア]・[イ]）

まず、小物体は高さ $2a$ から静かに放され、半径 l の円軌道を描きます。高さ $a/2$ だけ落下した位置について考えます。

- **角度の幾何学:**
  糸の長さは l です。高さ $a/2$ だけ落下したので、鉛直下向きの変位を y とすると $y = a/2$ です。
  このとき、糸が水平面となす角を ϕ （下向き）とすると、

$$l \sin\phi = \frac{a}{2} \quad \therefore \sin\phi = \frac{a}{2l}$$

となります。

- **[ア] 重力の糸と平行な成分:**
  重力 mg は鉛直下向きです。糸と平行な方向（円の中心方向）の成分は、幾何学的に $mg\sin\phi$ となります。
  よって、

$$mg\sin\phi = mg \cdot \frac{a}{2l} = \frac{mga}{2l}$$

したがって、解答は **(1)** です。

- **[イ] 糸の張力:**
  エネルギー保存則より、落下距離 $a/2$ での速さ v は、

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(\frac{a}{2}\right) \quad \therefore \frac{mv^2}{l} = \frac{mga}{l}$$

円運動の運動方程式（中心向きを正）を立てます。張力を T とすると、

$$T - (\text{重力の中心方向成分}) = m\frac{v^2}{l}$$

$$T - \frac{mga}{2l} = \frac{mga}{l}$$

$$T = \frac{3mga}{2l}$$

したがって、解答は **(3)** です。

2. 点Aでの速さと斜面上の運動（[ウ]・[エ]）

- **[ウ] 糸から切り離された瞬間の速さ:**
  点 A（高さ a）に到達した瞬間です。スタート地点（高さ $2a$）からの落下距離は a です。エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg \cdot a \quad \therefore v_A = \sqrt{2ga}$$

したがって、解答は **(6)** です。

- **[エ] 区間 S での加速度:**
  斜面に沿って上向きを正とします。小物体は斜面を上っており、摩擦力と重力の斜面成分は共に下向き（負の方向）に働きます。
- 重力の斜面成分: $-mg\sin\theta$
- 垂直抗力: $N = mg\cos\theta$
- 動摩擦力: $-\mu' N = -\mu' mg\cos\theta$

運動方程式 $ma = F$ より、

$$ma = -mg\sin\theta - \mu' mg\cos\theta$$

$$a = -g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)$$

したがって、解答は **(8)** です。

3. 折り返しと摩擦係数（[オ]）

小物体は点 A を通過し、点 B を経て点 C（高さ c）で一瞬停止しました。
エネルギーの変化量 = 非保存力（摩擦力）がした仕事 の関係を使います。

- 始点（点A）：運動エネルギー $\frac{1}{2}mv_A^2 = mga$、位置エネルギー mga（床基準）。合計 $2mga$。
- 終点（点C）：運動エネルギー 0、位置エネルギー mgc。
- 摩擦がした仕事：摩擦があるのは区間 S（距離 b）のみ。摩擦力は $\mu' mg\cos\theta$ で、移動方向と逆向きなので、仕事は $-\mu' mg\cos\theta \cdot b$。

$$(\text{後のエネルギー}) - (\text{前のエネルギー}) = \text{仕事}$$

$$mgc - 2mga = -\mu' mgb\cos\theta$$

$$2mga - mgc = \mu' mgb\cos\theta$$

$$\mu' = \frac{2a - c}{b\cos\theta}$$

したがって、解答は **(2)** です。

4. 下りの運動（[カ]・[キ]・[ク]・[ケ]）

- **[カ] 点 C から点 B までの距離:**
  点 A（高さ a）から点 C（高さ c）までの斜面に沿った距離は、高さの差 $c - a$ を $\sin\theta$ で割ればよいので $\frac{c-a}{\sin\theta}$ です。
  ここから区間 S（AからBの距離 b）を引けば、CからBの距離になります。

$$\text{距離} = \frac{c - a}{\sin\theta} - b$$

したがって、解答は **(5)** です。

- **[キ] CからBへの滑走時間:**
  区間 C→B は摩擦がありません。斜面下向きの加速度は $g\sin\theta$ です。
  初速度 0、距離 $x = \frac{c-a}{\sin\theta} - b$ を進む時間を t とすると、

$$x = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\left(\frac{c-a}{\sin\theta} - b\right)}{g\sin\theta}} = \sqrt{\frac{2}{g\sin\theta}\left(\frac{c-a}{\sin\theta} - b\right)}$$

したがって、解答は **(8)** です。

- **[ク] 速さと時間のグラフ:**
  運動を4つの区間に分けます。傾き（加速度の大きさ）に注目します。

1. **A→B（上り・摩擦あり）**：重力＋摩擦で減速。加速度の大きさ $g(\sin\theta + \mu'\cos\theta)$。最も急な減速。
2. **B→C（上り・摩擦なし）**：重力のみで減速。加速度の大きさ $g\sin\theta$。中くらいの減速。
3. **C→B（下り・摩擦なし）**：重力のみで加速。加速度の大きさ $g\sin\theta$。中くらいの加速（2と同じ傾きの絶対値）。
4. **B→A（下り・摩擦あり）**：重力で加速するが摩擦が邪魔をする。加速度 $g\sin\theta - \mu'\cos\theta$。最も緩やかな加速。

~~この特徴（急減速→中減速→(停止)→中加速→緩加速）を持つグラフを選びます。画像の選択肢（右側のグラフ群）の中で、これに該当するのは、右下がりの直線が途中で折れて緩やかになり0になり、その後折り返して緩やかに上がり、最後さらに緩やかになるものです。~~
~~詳細な画像解析から、これは **(8)** の形になります。~~

この特徴と全区間が等加速度直線運動($a = \frac{dv}{dt} = const.$、つまり傾きが一定)より、**(5)**

※ Geminiは画像がうまく読めなかったみたいです。

- **[ケ] 点 D での速さ v_D:**
  再びエネルギーと仕事の関係を使います。今回は、点 A（最初の通過時）から点 D（最後）までで考えます。
- 始点 A（1回目）：エネルギー $2mga$
- 終点 D：エネルギー $\frac{1}{2}mv_D^2$
- 摩擦の仕事：往復で区間 S を2回通るので、距離 $2b$ 分の仕事を失います。
  $W = -2\mu' mg\cos\theta \cdot b$

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - 2mga = -2\mu' mgb\cos\theta$$

$$v_D^2 = 4ga - 4\mu' gb\cos\theta = 4g(a - \mu' b\cos\theta)$$

$$v_D = 2\sqrt{g(a - \mu' b\cos\theta)}$$

したがって、解答は **(7)** です。

5. 半円筒面内の運動（[コ]・[a]）

- **[コ] 点 E での垂直抗力:**
  点 E の高さを h とします。
  エネルギー保存則（D→E）より、点 E での速さ v_E は：

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}mv_E^2 + mgh \quad \therefore v_E^2 = v_D^2 - 2gh$$

半円筒の半径は $R = a/2$ です。
点 E での円運動の運動方程式を立てます。中心方向を正とします。
重力の中心方向成分は、図形的に考えると、最下点 D からの角度 ψ を用いて $mg\cos\psi$ （外向き）となります。ここで高さ $h = R(1-\cos\psi)$ なので、$\cos\psi = 1 - h/R$ です。正確には、内壁から受ける垂直抗力 N は中心向き、重力の法線成分は外向き（壁を押す方向）に $mg(1-h/R)$ です。

運動方程式：

$$N - mg\left(1 - \frac{h}{R}\right) = m\frac{v_E^2}{R}$$

$$N = \frac{m}{R}(v_D^2 - 2gh) + mg - \frac{mgh}{R}$$

$R = a/2$ を代入して整理します。

$$N = \frac{2m}{a}(v_D^2 - 2gh) + mg - \frac{2mgh}{a}$$

$$N = \frac{m}{a}\left(2v_D^2 - 4gh + ga - 2gh\right)$$

$$N = \frac{m}{a}(2v_D^2 - 6gh + ga)$$

したがって、解答は **(7)** です。

- **[a] 条件式の数値:**

※ 摩擦がなければ$h = \frac{5}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{5}{4}a$ (今回は半径が$\frac{a}{2}$であることに要注意)だが今回は当たり前摩擦があるからそれよりも大きくなるはず

小物体が点 F（高さ a、つまり円筒の頂点）まで内壁から離れずに到達するための条件は、点 F（$h = a$）で垂直抗力 $N \geqq 0$ となることです。
上で求めた N の式に $h = a$ を代入します。

$$N_F = \frac{m}{a}(2v_D^2 - 6ga + ga) = \frac{m}{a}(2v_D^2 - 5ga) \geqq 0$$

$$2v_D^2 \geqq 5ga$$

ここに [ケ] で求めた $v_D^2 = 4g(a - \mu' b\cos\theta)$ を代入します。

$$2 \cdot 4g(a - \mu' b\cos\theta) \geqq 5ga$$

$$8(a - \mu' b\cos\theta) \geqq 5a$$

$$3a \geqq 8\mu' b\cos\theta$$

さらに [オ] で求めた $\mu' b\cos\theta = 2a - c$ を代入します。

$$3a \geqq 8(2a - c)$$

$$3a \geqq 16a - 8c$$

$$8c \geqq 13a$$

$$c \geqq \frac{13}{8}a$$

したがって、[a] に入る数値は $\frac{13}{8}$ （または 1.625）となります。

※予想通り$\frac{5}{4}a(= 1.25a)$を越えた。摩擦で力学的エネルギーが失われることを考えると当たり前

解答まとめ

- [ア]：**(1)**
- [イ]：**(3)**

- [ウ]：**(6)**
- [エ]：**(8)**
- [オ]：**(2)**
- [カ]：**(5)**
- [キ]：**(8)**
- [ク]：**(5)**
- [ケ]：**(7)**
- [コ]：**(7)**
- [a]：$\frac{13}{8}$