明治理工「た」解答速報

※ ほぼGemini 3 Pro Previewに解かせたのを確認し修正しています。正確性については一切保証しません。また、大学とは一切関係ない個人が作成したものです。

[I] 小問集合

(1) 3次方程式と整数解

【解答】

- **[ア]**：2
- **[イ]**：0
- **[ウエ]**：12
- **[オカ]**：24

【解説】
方程式を a について整理すると、
$x^3-8+a(x^2+2x-8)=0$
$(x-2)(x^2+2x+4)+a(x-2)(x+4)=0$
$(x-2)\{x^2+2x+4+a(x+4)\}=0$
$(x-2)\{x^2+(a+2)x+4(a+1)\}=0$
a の値によらず成立するには、共通因数の $x-2=0$ より $x=2$。

次に、虚数解を持つ条件は、後ろの2次方程式 $x^2+(a+2)x+4a+4=0$ の判別式 $D<0$ です。
$D=(a+2)^2-4(4a+4)=a^2+4a+4-16a-16=a^2-12a-12$
$a^2-12a-12<0$ を解くと、解の公式より境界値は $6\pm\sqrt{36+12}=6\pm4\sqrt{3}$。
$4\sqrt{3}=\sqrt{48}$ であり、$6<\sqrt{48}<7$ (6.9くらい) なので、
$-0.9\cdots<a<12.9\cdots$
a は整数なので、最小値は **0**、最大値は **12**。

※答えだけでいいの$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.73$ を速攻代入すると少し早い

$a=12$のとき、$x^2+14x+52=0$の2解が$x=\alpha,\beta$。
解と係数の関係より、
$\alpha+\beta=-14, \alpha\beta=52$
よって、

$$\begin{aligned}\alpha\beta+2\alpha+2\beta&=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)\\&=52+2(-14)\\&=24\end{aligned}$$

【別解・時短テクニック】
最後の $\alpha\beta+2\alpha+2\beta$ の計算ですが、真面目に解と係数の関係を使う必要はありません。
元の3次方程式は $x=2,\alpha,\beta$ を解に持つので、以下のように因数分解されます。
$x^3+ax^2+2ax-8(a+1)=(x-2)(x-\alpha)(x-\beta)$
右辺を展開したときの x の係数に注目します。
右辺の x の係数は、$(x-2)(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$ より
$1\cdot\alpha\beta+(-2)\cdot(-(\alpha+\beta))=\alpha\beta+2\alpha+2\beta$
となります。
一方、元の方程式の x の係数は $2a$ です。

よって恒等式により、$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = 2a$ が成り立ちます。
$a = 12$ なので、答えは $2 \times 12 = 24$ と瞬殺できます。

---

(2) 複素数平面と数列

【解答】

- **[キ]**：4
- **[クケ]**：13
- **[コ]**：5

【解説】

※うまいことを考えるよりも代入して計算するしかない

ポイント：
$z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_4$ と一方通行で計算すると、分数が何重にも重なり（連分数）、計算爆発の原因になります。
「ゴール（$z_4 = 1$）から一歩戻る」のが最大のコツです。

【解答手順】

1. **後ろから逆算する（$z_4 \to z_3$）**
条件より $z_4 = z_1 = 1$ です。漸化式の $n = 3$ の式を使います。

$$z_4 = \frac{a}{z_3 - 2i} = 1$$

分母を払うと、

$$a = z_3 - 2i \quad \therefore \quad \boldsymbol{z_3 = a + 2i} \quad \cdots ①$$

これだけで z_3 が非常にシンプルな形になりました。

2. **前から計算する（$z_1 \to z_2$）**
$z_1 = 1$ を $n = 1$ の式に代入します。

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{a}{1 - 2i}} \quad \cdots ②$$

3. **真ん中でつなぐ（$z_2 \to z_3$）**
$n = 2$ の漸化式 $z_3 = \frac{a}{z_2 - 2i}$ に、①と②を代入します。

$$a + 2i = \frac{a}{\frac{a}{1-2i} - 2i}$$

4. **a を求める**
右辺の繁分数を処理します（分母分子に $1 - 2i$ を掛ける）。

$$a + 2i = \frac{a(1 - 2i)}{a - 2i(1 - 2i)}$$

分母を展開して整理します（$a \neq 0$ なので両辺 a で割ってもよいですが、ここではそのままいきます）。

$$a + 2i = \frac{a(1 - 2i)}{a - (2i - 4i^2)} = \frac{a(1 - 2i)}{a - 4 - 2i}$$

分母を左辺に移項します。

$$(a+2i)(a-4-2i)=a(1-2i)$$

左辺を展開します。

$$a^2-4a-2ai+2ai-8i-4i^2=a^2-4a+4-8i$$

これが右辺 $a-2ai$ と等しいので、

$$a^2-4a+4-8i=a-2ai$$

実部と虚部を比較します。

- 実部：$a^2-4a+4=a \iff a^2-5a+4=0 \iff (a-1)(a-4)=0$
- 虚部：$-8=-2a \iff a=4$
  両方を満たすのは $a=4$ です。

面積計算：
$z_1=1$
$z_2=\frac{4}{1-2i}=\frac{4(1+2i)}{5}=0.8+1.6i$
$z_3=a+2i=4+2i$
座標平面で考えると、$A(1,0),B(0.8,1.6),C(4,2)$。
A を原点に平行移動すると、$A'(0,0),B'(-0.2,1.6),C'(3,2)$。
三角形の面積公式 $S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ より
$S=\frac{1}{2}|(-0.2\times 2)-(1.6\times 3)|=\frac{1}{2}|-5.2|=2.6=\frac{13}{5}$

【別解・裏技】行列（一次分数変換）の利用

※行列(現行過程では数Cに少しは入っているがほとんどの人が履修しないので実質大学数学)を使うとすこし楽に解けるけれども…

この形の漸化式 $z_{n+1}=\frac{az_n+b}{cz_n+d}$ は「一次分数変換（メビウス変換)」と呼ばれ、2×2 **の行列と対応**しています。

漸化式 $z_{n+1}=\frac{0\cdot z_n+a}{1\cdot z_n-2i}$ は、行列 $M=\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & -2i\end{pmatrix}$ に対応します。
合成関数（漸化式を繰り返すこと）は、行列の積に対応します。

【解法】
$z_4=z_1$ ということは、変換を3回繰り返すと元に戻る（恒等変換になる、あるいは z_1 が不動点になる）ということです。
まず、行列 M を3乗します。

1. M^2 の計算

$$M^2=\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & -2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & -2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -2ai\\ -2i & a-4\end{pmatrix}$$

（※ $-2i\times -2i=-4$ に注意）

2. M^3 の計算

$$M^3=M^2\cdot M=\begin{pmatrix}a & -2ai\\ -2i & a-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ 1 & -2i\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2ai & a^2+(-2ai)(-2i)\\ a-4 & -2ai+(a-4)(-2i)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2ai & a^2-4a \\ a-4 & -4ai+8i \end{pmatrix}$$

3. z_4 の条件適用
この行列 $M^3 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ が表す変換は $z_4 = \frac{Az_1+B}{Cz_1+D}$ です。
$z_1 = 1, z_4 = 1$ なので、

$$1 = \frac{A(1)+B}{C(1)+D} \iff A+B = C+D$$

これに行列の成分を代入します。

$$(-2ai) + (a^2-4a) = (a-4) + (-4ai+8i)$$

$$a^2 - 4a - 2ai = a - 4 + (-4a+8)i$$

整理して、

$$a^2 - 5a + 4 + (2a-8)i = 0$$

複素数の相等より、

$$\begin{cases} a^2-5a+4=0 \\ 2a-8=0 \end{cases}$$

下式より $a = 4$。これは上式も満たします。

結論：
この方法だと、分数の計算が一切出てこず、**行列の掛け算と多項式の整理だけ**で答えが出ます。大学数学の知識があるなら、この方法が圧倒的に速く、計算ミスも防げます。

面積計算は本解と同様

(3) 微積分（面積）

【解答】

- **[サ]**：5
- **[シ]**：6
- **[ス]**：3
- **[セ]**：2
- **[ソ]**：1
- **[タ]**：2
- **[チ]**：2

【解説】
共有点を求めるため $f(x) = g(x)$ とすると、
$\dfrac{\cos x}{2-\sin x} = \dfrac{3\cos x}{2(2-\sin x)^2}$
$\cos x \left(1 - \frac{3}{2(2-\sin x)}\right) = 0$
(i) $\cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$
(ii) $1 = \frac{3}{2(2-\sin x)} \implies 2(2-\sin x) = 3 \implies \sin x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$

小さい順に並べると $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$。
よって $\alpha_3 = \frac{5}{6}\pi, \alpha_4 = \frac{3}{2}\pi$。

面積 $S = \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} |g(x) - f(x)| dx$
この区間（第2象限後半〜第3象限）では $\cos x < 0$、$2 - \sin x > 0$ なので f, g ともに負。
大小関係を調べると、$g(x) - f(x) = f(x)\left(\frac{3}{2(2-\sin x)} - 1\right) = f(x)\frac{2\sin x - 1}{2(2-\sin x)}$。
区間 $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ では $\sin x$ は $1/2 \to -1$ なので $2\sin x - 1 \leq 0$。$f(x)$ も負（$\cos x \leq 0$)。よって積は正。つまり $g(x) \geq f(x)$。

※ 正直途中で大小関係が入れ替わらない&穴埋め試験でlogがプラス、分数がマイナスをみて全体に絶対値を付けて計算してもいいかも(記述だとlogがついた絶対値を外すときに大小を議論するのが大変なことがあるので最初に絶対値を外した方が良いが今回は符号まで確定しているためそれは不要)
求める面積をSとすると、

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} (g(x) - f(x)) dx \\
&= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{3\cos x}{2(2-\sin x)^2} - \frac{\cos x}{2-\sin x}\right) dx \\
&= \int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{(2-\sin x)'}{(2-\sin x)^2} + \frac{(2-\sin x)'}{2-\sin x}\right) dx \\
&= \left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2-\sin x} + \log|2-\sin x|\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \\
&= -\frac{1}{2} + \log 2
\end{aligned}
$$

※微分形接触累乗型を使って置換せずに求めた

---

(4) 確率

【解答】

- **[ツ]**：1
- **[テトナ]**：120
- **[ニ]**：7
- **[ヌネ]**：24
- **[ノハ]**：21
- **[ヒフ]**：40
- **[ヘ]**：7
- **[ホマ]**：80

【解説】

1人が3枚選ぶ組み合わせの総数は ${}_{10}C_3 = 120$ 通り。

(a) AとBが完全に一致
Aが選んだ1通りに対し、Bもその1通りを選ぶ確率。
$1 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{120}$

(b) BとCが共通なし
Bが選んだ後、Cは残り7枚から3枚選ぶ。

$\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$

(c) AとCが1枚だけ共通

Aが選んだ3枚から1枚選び(${}_3C_1$)、残り7枚から2枚選ぶ(${}_7C_2$)。
$\frac{3\times21}{120} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}$

(d) どの2人も1枚だけ共通、かつ3人の共通カードなし

集合 A, B, C の要素数をベン図で考えます。
条件を満たすには、以下の構成になるしかありません。

- $A \cap B$ に1枚（xとする）
- $B \cap C$ に1枚（yとする）
- $C \cap A$ に1枚（zとする）
- A, B, C それぞれに自分だけのカードが1枚ずつ（a, b, cとする）
  合計6種類の数字が必要です。

1. **数字の選び方**：10枚から6枚選ぶ $\rightarrow_{10} C_6 = 210$ 通り。
2. **共通部分の数字の決定**：選んだ6枚から、共通役の3枚(x, y, z)を選ぶ $\rightarrow_6 C_3 = 20$ 通り。残りは単独役。
3. **共通部分の配置**：x, y, z を $A \cap B, B \cap C, C \cap A$ のどこに置くか。円順列的に見えますが、A,B,Cは区別ある人なので、$3! = 6$ 通り。
4. **単独部分の配置**：残り3枚 a, b, c をA,B,Cに割り振る $\rightarrow 3! = 6$ 通り。

これらを満たす場合の数は $210 \times 20 \times 6 \times 6$。
全事象は 120^3。
確率 $P = \frac{210\times20\times36}{120\times120\times120} = \frac{210\times720}{120^3} = \frac{210\times6}{120\times120} = \frac{7}{80}$

(別解の考え方)

Aがまずあるセットを選びます（確率は1)。
BはAと1枚だけ被る必要があります（(c)より確率は $63/120$)。
このとき、AとBの和集合は $3 + 3 - 1 = 5$枚のカードを含みます。
Cは、$(A \cap B)$ のカードを含まず、$(Aのみ)$ から1枚、$(Bのみ)$ から1枚選び、残り5枚（未使用）から1枚選ぶ必要があります。

- $A \cap B$ のカード（1枚）：選んではいけない。
- A のみのカード（2枚）：ここから1枚選ぶ ${}_2C_1 = 2$ 通り。
- B のみのカード（2枚）：ここから1枚選ぶ ${}_2C_1 = 2$ 通り。
- 未使用のカード（5枚）：ここから1枚選ぶ ${}_5C_1 = 5$ 通り。
  よってCの条件を満たす組み合わせは $2 \times 2 \times 5 = 20$ 通り。確率は $20/120 = 1/6$。
  求める確率は、(Aは任意) $\times$ (Bの条件) $\times$ (Cの条件)
  $= 1 \times \frac{63}{120} \times \frac{1}{6} = \frac{21}{40} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{80}$。
  こちらの方が計算は速いです。

[II] 空間ベクトルと四面体

【解答】

- **[あ]**：$\sqrt{13}$
- **[い]**：$\frac{\sqrt{105}}{3}$
- **[う]**：$\frac{1}{6}$
- **[え]**：$\frac{2}{3}$

- **[お]**：$\frac{\sqrt{35}}{9}$

※本文を適当に読んで正四面体だと思い込んだらそこで終了(最後10分で気が付きましたがやらかしました)

【解説】

(1)

※いつも通り余弦定理のベクトル表示を使用する

$|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = L$ とおきます。
底面は一辺の長さが2の正三角形なので、$|\vec{AB}| = 2$ です。
$|\vec{AB}|^2 = |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2$
これに値を代入すると、
$2^2 = L^2 - 2(11) + L^2$
$4 = 2L^2 - 22$
$2L^2 = 26 \implies L^2 = 13$
$L > 0$ より $L = \sqrt{13}$
よって、$\boxed{あ} = \sqrt{13}$ です。

(2)
$\triangle ABC$ は正三角形であり、$OA = OB = OC$ なので、頂点Oから下ろした垂線の足Hは $\triangle ABC$ の外心（重心）と一致します。
一辺の長さが2の正三角形の高さは $\sqrt{3}$ であり、重心はこれを $2 : 1$ に内分するため、頂点からHまでの距離（外接円の半径 R）は
$AH = \sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
直角三角形 $\triangle OHA$ において三平方の定理より
$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 13 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 13 - \frac{12}{9} = 13 - \frac{4}{3} = \frac{35}{3}$
$OH = \sqrt{\frac{35}{3}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}$
よって、$\boxed{い} = \frac{\sqrt{105}}{3}$ です。

※答え汚いがしょうがない

(3)
辺ABの中点をMとします。$\triangle OAB$ は二等辺三角形、$\triangle ABC$ は正三角形なので、
$OM \perp AB, \quad CM \perp AB$
となります。したがって、面OABと面ABCのなす角 θ は $\angle OMC$ と等しくなります。
$\triangle OMC$ の各辺の長さを求めます。

- $CM = \sqrt{3}$（正三角形の高さ）
- $OC = \sqrt{13}$
- OM は直角三角形 $\triangle OMA$（$AM = 1, OA = \sqrt{13}$）より、$OM = \sqrt{13 - 1} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\triangle OMC$ で余弦定理を用いると、
$\cos\theta = \frac{OM^2 + CM^2 - OC^2}{2 \cdot OM \cdot CM} = \frac{12 + 3 - 13}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$
よって、$\boxed{う} = \frac{1}{6}$ です。

(4)
面OABと面ABCのなす角を二等分する平面は、断面 $\triangle OMC$ において $\angle OMC$ の二等分線を通ります。

この二等分線と辺OCの交点がPとなります。
$\triangle OMC$ において角の二等分線の性質より、
$OP : PC = OM : MC = 2\sqrt{3} : \sqrt{3} = 2 : 1$
よって $\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{OC}$ となるので、$\boxed{\text{え}} = \frac{2}{3}$ です。

次に体積を求めます。
四面体OABCの体積 $V_{OABC} = \frac{1}{3} \times \triangle ABC \times OH$
$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$
$V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{105}}{3} = \frac{\sqrt{315}}{9} = \frac{3\sqrt{35}}{9} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

四面体PABCは、四面体OABCと底面ABCを共有しています。
点Pは線分OCを $2 : 1$ に内分する点（Cに近い方が1）なので、底面ABCからの高さは、点Oの高さの $\frac{1}{3}$ 倍になります。
よって体積も $\frac{1}{3}$ 倍となり、
$V_{PABC} = \frac{1}{3}V_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{35}}{3} = \frac{\sqrt{35}}{9}$
よって、$\boxed{\text{お}} = \frac{\sqrt{35}}{9}$ です。

【別解・裏技（大学数学範囲)】

※今回は座標が与えられていなかったので実践的ではないが、空間の座標が与えられている四面体の場合はスカラー三重責で瞬殺(大学側も当然わかっているから基本的に出てこない)

グラム行列式による体積計算（検算用）
3辺の長さと内積が与えられている場合、四面体の体積 V は以下の公式で求まります。
$V = \frac{1}{6}\sqrt{\det(G)}$
ここで G はグラム行列 $G = \begin{pmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & |\vec{b}|^2 & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & |\vec{c}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 11 \\ 11 & 11 & 13 \end{pmatrix}$

行列式の値を計算します。
$\det(G) = 13(13^2 - 11^2) - 11(11 \cdot 13 - 11^2) + 11(11^2 - 13 \cdot 11)$
もっと簡単に、行基本変形を行うと（全ての行から1行目を引くなどして)、
$\det\begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 13(4) - 11(-4) + 11(4) = 52 + 44 + 44 = 140$
よって $V_{OABC} = \frac{1}{6}\sqrt{140} = \frac{2\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$
正攻法の結果と一致しました。
求める V_{PABC} はこの $1/3$ なので $\frac{\sqrt{35}}{9}$ と瞬時に確認できます。

[III] 関数の最大・最小と領域の面積

【解答】

- **[か]**：$\frac{1}{\sqrt{a}} - 1$
- **[き]**：$2\sqrt{a} - a - b$
- **[く]**：$\frac{1}{4}$
- **[け]**：$\frac{1}{2}$
- **[こ]**：$2\sqrt{a} - a$
- **[さ]**：$a + \frac{1}{2}$

- **[し]**：1
- **[す]**：1
- **[せ]**：$\frac{1}{48}$

【解説】

(1) 最小値
$f(x) = \frac{1}{x+1} + ax - b$ を微分します。
$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + a$
$f'(x) = 0$ とすると、$(x+1)^2 = \frac{1}{a}$
$x > -1, a > 0$ より、$x + 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ すなわち $x = \frac{1}{\sqrt{a}} - 1$
増減表を書くと、この点で減少から増加に転じるため最小となります。
最小値は
$f\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}} + a\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - 1\right) - b = \sqrt{a} + \sqrt{a} - a - b = 2\sqrt{a} - a - b$

【別解（相加平均・相乗平均）】
※こちらは記述試験でも堂々と使える別解。これに気がつくと微分が要らなくなるので早く解ける

$x > -1$ より $x + 1 > 0$、$a > 0$ なので、相加平均・相乗平均の関係が使えます。
$f(x) = \frac{1}{x+1} + a(x+1) - a - b \geq 2\sqrt{\frac{1}{x+1} \cdot a(x+1)} - a - b = 2\sqrt{a} - a - b$
等号成立は $\frac{1}{x+1} = a(x+1) \iff (x+1)^2 = \frac{1}{a} \iff x = \frac{1}{\sqrt{a}} - 1$
微分なしで一瞬で求まります。

(2) 実数解の条件
$f(x) = 0$ が $0 < x < 1$ に異なる2つの実数解を持つ条件は、$y = f(x)$ のグラフを考えることで以下の3点に集約されます。

1. **頂点のy座標 < 0**：最小値が負であること。
   $2\sqrt{a} - a - b < 0 \iff b > 2\sqrt{a} - a$
2. **軸の位置が区間内**：最小値をとる x が $0 < x < 1$ にあること。
   $0 < \frac{1}{\sqrt{a}} - 1 < 1 \iff 1 < \frac{1}{\sqrt{a}} < 2 \iff 1 < \frac{1}{a} < 4 \iff \frac{1}{4} < a < 1$
3. **端点のy座標 > 0**：下に凸なグラフが区間内で2回交わるには、端点が正である必要がある。
   $f(0) > 0 \iff 1 - b > 0 \iff b < 1$
   $f(1) > 0 \iff \frac{1}{2} + a - b > 0 \iff b < a + \frac{1}{2}$

これらをまとめると、$\frac{1}{4} < a < 1$ の範囲で、
$2\sqrt{a} - a < b < \min\left(1, a + \frac{1}{2}\right)$
となります。
上限の 1 と $a + \frac{1}{2}$ の大小関係は $a = \frac{1}{2}$ で入れ替わります。

- $\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{2}$ のとき：$a + \frac{1}{2} \leq 1$ なので、$2\sqrt{a} - a < b < a + \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2} < a < 1$ のとき：$a + \frac{1}{2} > 1$ なので、$2\sqrt{a} - a < b < 1$

(3) 面積
求める面積 S は、(2)の領域の面積です。
$S = \int_{1/4}^{1/2} \left\{\left(a + \frac{1}{2}\right) - (2\sqrt{a} - a)\right\} da + \int_{1/2}^{1} \left\{1 - (2\sqrt{a} - a)\right\} da$

被積分関数を平方完成の形に変形すると計算が楽になります。
前半：$2a - 2\sqrt{a} + \frac{1}{2} = 2(\sqrt{a} - \frac{1}{2})^2$
後半：$a - 2\sqrt{a} + 1 = (\sqrt{a} - 1)^2$

$S_1 = \int_{1/4}^{1/2} 2(\sqrt{a} - \frac{1}{2})^2 da = \left[a^2 - \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{48}$

$S_2 = \int_{1/2}^{1} (\sqrt{a} - 1)^2 da = \left[\frac{1}{2}a^2 - \frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}} + a\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

合計すると $\sqrt{2}$ の項が消えます。

$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{48} + \frac{1}{6} - \frac{5}{8}$

$= \frac{1}{48}$