東京理科大学 2/3 物理【創域理工学部・創域情報学部 B方式】 解答速報

※Gemini 3 Pro Previewによって作成した解答解説を一部編集。一応確認済みだから大丈夫なはず

1

解答一覧

(1)
[ア] ④ ($\cos\theta$)
[イ] ③ ($-1/2$)
[ウ] ⑥ ($\sin\theta$)
[エ] ③ ($\sin\theta$)
[オ] ⑧ ($\sin\theta\cos\theta$)
[カ] ⑥ ($\frac{\sin^2\theta}{2}$)
[キ] ⑨ ($-\frac{1}{2\cos^2\theta}$)
[ク] ④ ($\tan\theta$)

(2)
[ケ] ③ ($-\frac{2v_0^2}{gX}$)
[コ] ⑨ ($1+\frac{2v_0^2(Y-h)}{gX^2}$)
[サ] ② ($-1/2$)
[シ] ⑥ ($1/2$)
[ス] ⑦ (1)

(3)
[セ] ⑧ ($\sqrt{2}$)
[ソ] ⓪ (-4)
[タ] ⑦ ($17/16$)
[チ] ⑤ ($\frac{\sqrt{17}}{8}$)
[ツ] ③ ($\frac{\sqrt{17}}{17}$)
[テ] ⑨ ($3/2$)
[ト] ① ($-1/2$)
[ナ] ⑥ (1)
[ニ] ③ (慣性力)
[ヌ] ④ ($\frac{\sqrt{2}}{4}$)

(1) 放物運動の基礎

※ Geminiはなんか微積を使ってやったがいつも通りの斜方投射と同じ考え方で問題なく解ける

まず、運動方程式を立てて、位置座標を求めます。
時刻 t における小物体（星）の位置ベクトルを $\vec{r}=(x,y)$、速度ベクトルを $\vec{v}=(v_x,v_y)$、加速度ベクトルを $\vec{a}=(0,-g)$ とします。

初期条件（$t=0$）は以下の通りです。
位置：$\vec{r}(0)=(0,h)$

速度：$\vec{v}(0) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta)$

運動方程式（または加速度の定義）より、速度は加速度を時間で積分して求められます。

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}\, dt = (C_x, -gt + C_y)$$

初期条件より、$v_x = v_0 \cos\theta$、$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$ です。

次に、位置は速度を時間で積分して求められます。

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\, dt$$

x 成分：

$$x = \int v_0 \cos\theta\, dt = (v_0 \cos\theta)t + C_{x0}$$

$t = 0$ で $x = 0$ なので $C_{x0} = 0$。よって、$x = (\cos\theta)v_0 t$。
[ア] は $\cos\theta$ なので、解答群の ④ です。

y 成分：

$$y = \int (-gt + v_0 \sin\theta)\, dt = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + C_{y0}$$

$t = 0$ で $y = h$ なので $C_{y0} = h$。よって、$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (\sin\theta)v_0 t + h$。
この式を問題文の形 $y = [\text{イ}] \times gt^2 + ([\text{ウ}]) \times v_0 t + h$ と比較すると、
[イ] は $-\frac{1}{2}$ なので、解答群の ③。
[ウ] は $\sin\theta$ なので、解答群の ⑥。

最高点について
最高点では y 成分の速度が 0 になります。

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

よって、最高点に達する時刻は $(\sin\theta) \times \frac{v_0}{g}$ です。
[エ] は $\sin\theta$ なので、(エ)〜(ク)の解答群の ③。

このときの座標 (x_m, y_m) を求めます。

$$x_m = v_0 \cos\theta \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta$$

[オ] は $\sin\theta \cos\theta$ なので、解答群の ⑧。

$$y_m = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 + v_0 \sin\theta \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right) + h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta + h$$

[カ] は $\frac{\sin^2\theta}{2}$ なので、解答群の ⑥。

※ 私は$v_y = 0$を思いつかずに普通にyの式を平方完成して出した。[カ]を考えると平方完成が正攻法かも

軌道の方程式
$x = v_0 \cos\theta \cdot t$ より $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$ を y の式に代入して t を消去します。

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) + h$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x + h$$

問題文の形 $y = ([キ]) \times \frac{gx^2}{v_0^2} + ([ク]) \times x + h$ と比較します。
[キ] は $-\frac{1}{2\cos^2\theta}$ なので、解答群の ⑨。
[ク] は $\tan\theta$ なので、解答群の ④。

---

(2) 安全圏（包絡線）の導出

※ 何故か物理ではなく数学の軌跡と領域の問題が登場(通称逆像法とか言われている考え方で領域を求める)

点 (X, Y) を通過するための条件を考えます。軌道の式に (X, Y) を代入し、$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ の関係式を用いて変形します。

$$Y = -\frac{gX^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2\theta) + X\tan\theta + h$$

両辺に $\frac{2v_0^2}{gX^2}$ を掛けて整理します。

$$\frac{2v_0^2}{gX^2}(Y - h) = -(1 + \tan^2\theta) + \frac{2v_0^2}{gX}\tan\theta$$

$$\tan^2\theta - \frac{2v_0^2}{gX}\tan\theta + \left(1 + \frac{2v_0^2(Y-h)}{gX^2}\right) = 0$$

これより、
[ケ] は $-\frac{2v_0^2}{gX}$ なので、解答群の ③。
[コ] は $1 + \frac{2v_0^2(Y-h)}{gX^2}$ なので、解答群の ⑨。

この $\tan\theta$ に関する2次方程式が実数解を持つ（＝そのような投射角が存在する）ための条件は、判別式 $D \geq 0$ です。

$$D/4 = \left(-\frac{v_0^2}{gX}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2(Y-h)}{gX^2}\right) \geq 0$$

$$\frac{4v_0^4}{g^2X^2} - 4 - \frac{8v_0^2(Y-h)}{gX^2} \geq 0$$

ここでは一般の座標 (x, y) の領域 $y \leq f(x)$ を求めたいので、$X \to x, Y \to y$ と読み替えて計算を進めます。

$$\frac{v_0^4}{g} - gx^2 - 2v_0^2(y - h) \geq 0$$

y について解きます。

$$2v_0^2 y \leq \frac{v_0^4}{g} - gx^2 + 2v_0^2 h$$

$$y \leq -\frac{1}{2} \cdot \frac{gx^2}{v_0^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} + 1 \cdot h$$

これが求める領域 $f(x)$ です。
よって、[サ]②、[シ]⑥、[ス]⑦

---

(3) 花火のモデルと3次元的な広がり

花火玉が最高点 h に達するための初速度 V_0 をエネルギー保存則（または等加速度運動の式）から求めます。

$$0 - V_0^2 = 2(-g)h \quad \Longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{2gh}$$

[セ] は $\sqrt{2}$ なので、解答群の ⑧。

(a) 小物体（星）の到達領域

小物体が飛び散る速さ v_0 は $\frac{V_0}{4} = \frac{\sqrt{2gh}}{4}$ です。
$v_0^2 = \frac{2gh}{16} = \frac{gh}{8}$ となります。

領域の式 $y \leq -\frac{1}{2}\frac{g(x^2+z^2)}{v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} + h$ に代入します（x^2 を x^2+z^2 に置き換え）。
第1項：

$$-\frac{1}{2}\frac{g(x^2+z^2)}{gh/8} = -\frac{4(x^2+z^2)}{h}$$

第2項：

$$\frac{gh/8}{2g} = \frac{h}{16}$$

よって、

$$y \leq -4\frac{x^2+z^2}{h} + \frac{h}{16} + h = -4\frac{x^2+z^2}{h} + \frac{17}{16}h$$

[ソ] は -4 なので、解答群の ⓪。
[タ] は $\frac{17}{16}$ なので、解答群の ⑦。

落下半径 r
地面 ($y=0$) における円の半径 $r = \sqrt{x^2+z^2}$ を求めます。

$$0 = -4\frac{r^2}{h} + \frac{17}{16}h \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{17}{64}h^2$$

$$r = \frac{\sqrt{17}}{8}h$$

[チ] は $\frac{\sqrt{17}}{8}$ なので、解答群の ⑤。

最遠点に到達する投射角 θ_m
領域の境界（包絡線）に到達するのは、判別式 $D=0$、つまり重解を持つときです。

(2)の2次方程式において重解は $\tan\theta_m = \frac{-(1\text{次の係数})}{2\times(2\text{次の係数})}$ で与えられます。

$$\tan\theta_m = \frac{2v_0^2/gX}{2\cdot 1} = \frac{v_0^2}{gX}$$

ここで $X = r = \frac{\sqrt{17}}{8}h$、$v_0^2 = \frac{gh}{8}$ を代入します。

$$\tan\theta_m = \frac{gh/8}{g\cdot\frac{\sqrt{17}}{8}h} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

[ツ] は $\frac{\sqrt{17}}{17}$ なので、解答群の ③。

滞空時間 T
$\tan\theta_m = \frac{1}{\sqrt{17}}$ のとき、$\cos^2\theta_m = \frac{1}{1+\tan^2\theta_m} = \frac{1}{1+1/17} = \frac{17}{18}$ です。

※こんなことをしなくても各辺が$\sqrt{17}, 1, \sqrt{18}$の直角三角形を考えれば$\cos\theta_m = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{18}}$はすぐわかる(厳密には$-\frac{\pi}{2} < \theta_m < 0$の範囲ではこの方法ではできないが答えだけだしそんなことは気にしない)

水平方向の等速運動より $r = v_0\cos\theta_m T$ なので、

$$T^2 = \frac{r^2}{v_0^2\cos^2\theta_m} = \frac{\frac{17}{64}h^2}{\frac{gh}{8}\cdot\frac{17}{18}} = \frac{17h^2}{64}\cdot\frac{8}{gh}\cdot\frac{18}{17} = \frac{h}{8g}\cdot 18 = \frac{9h}{4g}$$

よって、$T = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$ です。

※Tで考えると根号が邪魔すぎるのでT^2で考えて後でまとめてルートを取るほうが楽

[テ] は $\frac{3}{2}$ なので、解答群の ⑨。

(b) 重心運動と相対運動
重心の運動
小物体が打ち出された瞬間、全運動量の和は 0 なので、重心の初速度は 0 です。
重心には外力（重力）のみが働くため、重心は初速度 0、位置 h から自由落下します。

$$y_G = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

[ト] は $-\frac{1}{2}$ なので、解答群の ①。
[ナ] は 1 なので、解答群の ⑥。

重心とともに落下する観測者

この観測者は加速度 $\vec{g}$ で運動している非慣性系にいます。したがって、すべての小物体には「慣性力」 $\vec{f} = -m\vec{g}$ が働きます。これが重力 $m\vec{g}$ と打ち消し合うため、観測者から見れば小物体は無重力状態（等速直線運動）に見えます。
[ニ] は **慣性力** なので、解答群の ③。

球の半径 $R(t)$
重力の影響がキャンセルされたので、各小物体は爆発時の速さ v_0 で等速で広がります。

$$R(t) = v_0 t = \frac{\sqrt{2gh}}{4}t = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{gh}t$$

[ヌ] は $\frac{\sqrt{2}}{4}$ なので、解答群の ④。

2

※ この大問は単位を確認すると消える選択肢がたくさんある(ただ私はそんな事を気にしていなくて復習のときによく見たら選択肢の単位が違うことに気がついた)

解答一覧

(1)
[ア] ① ($\frac{kQe}{a^2}$)
[イ] ⓪ (原点に向かう向き)
[ウ] ② ($\frac{v_0^2}{a}$)
[エ] ③ ($\sqrt{\frac{kQe}{ma}}$)
[オ] ③ ($2\pi a\sqrt{\frac{ma}{kQe}}$)
[カ] ③ ($\frac{e}{2\pi a}\sqrt{\frac{kQe}{ma}}$)
[キ] ④ ($\frac{\mu_0 e}{4\pi a^2}\sqrt{\frac{kQe}{ma}}$)
[ク] ⑤ (z 軸の負の向き)

(2)
[ケ] ① (evB)
[コ] ③ ($\frac{eBa}{2m}$)
[サ] ② ($1+\frac{ea^3}{4mkQ}B^2$)
[シ] ⑤ ($\frac{e^2B}{4\pi m}$)
[ス] ④ ($\frac{\mu_0 e^2 B}{8\pi ma}$)
[セ] ⑤ (z 軸の負の向き)

(1) 外部磁場がない場合

[ア] 静電気力の大きさ F_0
クーロンの法則より、力 F の大きさは $F=k\frac{|q_1q_2|}{r^2}$ です。
今回は電荷 Q と $-e$、距離 a なので、$F_0=\frac{kQe}{a^2}$ となります。
単位チェック:
力の単位は $[N]$ です。クーロン定数 k の単位は $[N\cdot m^2/C^2]$ です。

- ⓪ $\frac{kQe}{a}\to\frac{[N\cdot m^2/C^2]\cdot[C^2]}{[m]}=[N\cdot m]$ (J: エネルギーの単位) → 不適
- ① $\frac{kQe}{a^2}\to[N]\to$ 正しい
- ② $\frac{kQe}{a^3}\to[N/m]\to$ 不適
  よって、正解は ① です。

[イ] 静電気力の向き
正電荷 Q と負電荷 $-e$ の間には引力が働きます。電子は原点に引かれるので、「原点に向かう向き」です。
よって、正解は ⓪ です。

※ フレミングの左手の法則、外積で考えるときは電荷が$-e<0$に要注意 (私はいつも外積でやっているのでフレミングはわからない…)

[ウ] 運動方程式の左辺（加速度項）

等速円運動の加速度の大きさは $a_c = \frac{v^2}{r}$ です。ここでは半径 a、速さ v_0 なので、運動方程式の左辺は $m\frac{v_0^2}{a}$ となります。

単位チェック:
加速度の単位は $[m/s^2]$ です。

- ⓪ $\frac{v_0}{a} \to \frac{[m/s]}{[m]} = [1/s]$ (振動数など) $\to$ 不適
- ② $\frac{v_0^2}{a} \to \frac{[m^2/s^2]}{[m]} = [m/s^2] \to$ 正しい

※単位を確認する段階で②、⑤の2しかありえない

よって、正解は **②** です。

[エ] 電子の速さ v_0

運動方程式 $m\frac{v_0^2}{a} = \frac{kQe}{a^2}$ を v_0 について解きます。
$v_0^2 = \frac{kQe}{ma}$ より、$v_0 = \sqrt{\frac{kQe}{ma}}$ です。
単位チェック:
速さの単位は $[m/s]$。v_0^2 の単位は $[m^2/s^2] = [J/kg]$ ($E = \frac{1}{2}mv^2$より) です。

- ⓪ $\frac{kQe}{ma}$ は v_0^2 と同じ次元になるので不適。
- ③ $\sqrt{\frac{kQe}{ma}}$ は $\sqrt{[v^2]} = [v]$ となるので正しい。
  よって、正解は **③** です。

[オ] 周期（1周する時間）

円周 $2\pi a$ を速さ v_0 で回るので、時間 $T = \frac{2\pi a}{v_0}$ です。
これに $v_0 = \sqrt{\frac{kQe}{ma}}$ を代入すると、
$T = 2\pi a\sqrt{\frac{ma}{kQe}}$ となります。
よって、正解は **③** です。

[カ] 電流の大きさ I_0

電流の定義は「単位時間あたりに通過する電気量」すなわち $I = \frac{q}{t}$ です。
電子1個（電気量 e）が周期 T で回っているので、
$I_0 = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi a}\sqrt{\frac{kQe}{ma}}$
となります。
単位チェック:
電流 I は $e \times (\text{回転数})$ なので、$I \propto \frac{ev_0}{a}$ の形になるはずです。
③ $\frac{e}{2\pi a}\sqrt{\frac{kQe}{ma}} = \frac{e}{2\pi a}v_0$ となっているので次元的に正しいです。
（⓪などは $1/a^2$ の次元を持っており、$\frac{ev}{a} \propto \frac{e}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-1.5}$ に対して次数が合いません）
よって、正解は **③** です。

[キ] 中心磁場の大きさ B_0

円形電流が中心につくる磁束密度の公式は $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$ です。
$B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2a} = \frac{\mu_0}{2a}\left(\frac{e}{2\pi a}\sqrt{\frac{kQe}{ma}}\right) = \frac{\mu_0 e}{4\pi a^2}\sqrt{\frac{kQe}{ma}}$
よって、正解は **④** です。

[ク] 磁場の向き
※ 電流と電子の向きが逆なことに要注意

電子（負電荷）が z 軸正方向から見て反時計回りに回っています。
電流の向きは電子の移動方向と逆なので、「時計回り」です。
右ねじの法則より、時計回りの電流が中心につくる磁場は「紙面の奥向き」、つまり「z 軸の負の向き」です。
よって、正解は ⑤ です。

(2) 外部磁場 B を加えた場合

[ケ] 追加される力の項
磁場中を運動する荷電粒子にはローレンツ力が働きます。力の大きさは $f = |q|vB = evB$ です。
向きを確認します。

- 電子の速度ベクトル $\vec{v}$：反時計回り（例：x軸上で $+y$ 方向）
- 磁場 $\vec{B}$：$+z$ 方向
- 外積 $\vec{v} \times \vec{B}$：$+x$ 方向（中心から外向き）
- 電子は負電荷なので、力 $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$ は $-x$ 方向（中心向き）
  静電気力も中心向き（引力）だったので、ローレンツ力も同じ向きに加わります。
  よって、力は $F = F_0 + evB$ となり、加わる項は正の evB です。
  よって、正解は ① です。

[コ]・[サ] 速度の変化
運動方程式を立てます。

$$m\frac{v^2}{a} = \frac{kQe}{a^2} + evB$$

ここで、(1)より $\frac{kQe}{a^2} = m\frac{v_0^2}{a}$ なので、これを代入します。

$$m\frac{v^2}{a} = m\frac{v_0^2}{a} + evB$$

両辺に $\frac{a}{m}$ をかけて整理します。

$$v^2 - \frac{eBa}{m}v - v_0^2 = 0$$

この v についての2次方程式を解の公式で解きます。

$$v = \frac{\frac{eBa}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{eBa}{m}\right)^2 - 4(1)(-v_0^2)}}{2}$$

$$v = \frac{eBa}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{eBa}{2m}\right)^2 + v_0^2}$$

$$v = \frac{eBa}{2m} \pm v_0\sqrt{1 + \left(\frac{eBa}{2mv_0}\right)^2}$$

物理的に $v > 0$ なので、プラスの方を採用します（$\sqrt{1+\dots} > 1$ なのでマイナスだと速度が負になる）。
形を $v = [\text{コ}] \pm v_0\sqrt{[\text{サ}]}$ と比較します。

[コ] は $\frac{eBa}{2m}$ です。
単位チェック:
v の単位は $[m/s]$。
ローレンツ力の式 $F = qvB$ より $[B] = [F/qv] = [N/(C \cdot m/s)]$。
$[eBa/m] = [C] \cdot [N/(C \cdot m/s)] \cdot [m]/[kg] = [N \cdot s \cdot m/m \cdot kg] = [N \cdot s/kg] = [(kg \cdot m/s^2) \cdot s/kg] = [m/s]$
。
単位は合っています。
よって、正解は ③ です。

[サ] は根号の中身の 1 以外の部分です。
$\left(\frac{eBa}{2mv_0}\right)^2 = \frac{e^2B^2a^2}{4m^2v_0^2}$
これに $v_0^2 = \frac{kQe}{ma}$ を代入して整理します。

$$\frac{e^2B^2a^2}{4m^2} \cdot \frac{ma}{kQe} = \frac{ea^3B^2}{4mkQ}$$

よって、項は $1 + \frac{ea^3}{4mkQ}B^2$ となります。
よって、正解は ② です。

[シ] 電流の変化
近似式 $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ を使いますが、B^2 の項は無視するとあるので、$\sqrt{\dots} \approx 1$ とみなせます（あるいは単純に $v \approx v_0 + [コ]$ の式を使います）。
$v \approx v_0 + \frac{eBa}{2m}$
電流は $I = \frac{ev}{2\pi a}$ なので、

$$I = \frac{e}{2\pi a}\left(v_0 + \frac{eBa}{2m}\right) = \underbrace{\frac{ev_0}{2\pi a}}_{I_0} + \frac{e}{2\pi a} \cdot \frac{eBa}{2m}$$

変化分は後ろの項です。

$$\Delta I = \frac{e^2Ba}{4\pi am} = \frac{e^2B}{4\pi m}$$

よって、正解は ⑤ です。

※ vが大きくなることで電子が1周するのにかかる時間Tが小さくなるので$I = \frac{e}{T}$よりI も大きくなる。

[ス] 磁束密度の変化の大きさ
中心磁場は $B_{center} = \frac{\mu_0 I}{2a}$ なので、変化分は

$$\Delta B_{center} = \frac{\mu_0}{2a}\Delta I = \frac{\mu_0}{2a} \cdot \frac{e^2B}{4\pi m} = \frac{\mu_0 e^2 B}{8\pi ma}$$

よって、正解は ④ です。

[セ] 磁束密度の変化の向き
※ ここまでの流れがわからなくても反磁性体と類似するというヒントがあるから(知っていれば)これだけは解けるはず

ここまでの流れを整理します。

1. 電子は反時計回り。

2. 電流 I_0 は時計回り。つくる磁場は奥向き（$-z$)。
3. 外部磁場（$+z$）をかけると、ローレンツ力が中心向きに加わり、向心力が増すため、電子の速さ v が増加した（$v > v_0$)。
4. 電子が速くなったので、等価的な電流 I（時計回り）の大きさも増加した。
5. 時計回りの電流が増えたので、その電流がつくる「奥向き（$-z$)」の磁場が強まった。
6. したがって、磁束密度の変化分ベクトルは z **軸の負の向き** である。

（※これはレンツの法則や反磁性の性質「外部磁場の変化を打ち消す向きに磁場が生じる」とも合致します。外部磁場が $+z$ なので、逆向きの $-z$ に磁場が発生しています。）

よって、正解は ⑤ です。

---

3 熱力学

※ τはタウって読むらしい。私は途中でT, tと混乱してしまった...

解答一覧

(ア)
[ア] ⑤ $(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/(\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}))$

(1)
[イ] ③ ($\frac{n_0RT_0}{V}$)
[ウ] ① ($\frac{3}{2}n_0RT_0$)

(2)
[エ] ⓪ (τ)
[オ] ⑦ ($\frac{2\tau}{\tau+1}$)
[カ] ⑦ ($\frac{2\tau}{\tau+1}$)
[キ] ⑦ ($\frac{2\tau}{\tau+1}$)
[ク] ⑥ ($\frac{2(\tau-1)}{\tau+1}$)

(3)
[ケ] ④ ($\frac{\tau+1}{2}$)
[コ] ① ($n_A = n_B$)
[サ] ⑥ ($\frac{2(\tau-1)}{\tau+1}$)

(4)
[シ] ③ ($\frac{3\tau}{\tau+2}$)
[ス] ④ ($\bar{n}_A = \bar{n}_B < \bar{n}_C$)

Rの単位

[ア] 気体定数 R の単位
理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ より、$R = \frac{PV}{nT}$ です。
それぞれの単位を代入します。
$P : \mathrm{Pa} = \mathrm{kg}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2)$
$V : \mathrm{m}^3$

n : mol
T : K

R の単位 $= \frac{[\mathrm{kg}/(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2)]\cdot[\mathrm{m}^3]}{[\mathrm{mol}]\cdot[\mathrm{K}]} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$
これはエネルギー（J）を物質量と温度で割ったものに相当します。
よって、正解は ⑤ です。

---

(1) 初期状態

[イ] 初期圧力 p_0
状態方程式 $p_0V = n_0RT_0$ より、
$p_0 = \frac{n_0RT_0}{V}$
よって、正解は ③ です。

[ウ] 内部エネルギー U_0
単原子分子理想気体の内部エネルギーは $U = \frac{3}{2}nRT$ です。
$U_0 = \frac{3}{2}n_0RT_0$
よって、正解は ① です。

---

(2) 部屋Bを加熱する過程

部屋Bの温度を $T_B = \tau T_0$ にします。部屋Cの温度は T_0 のままです。
弁が開いて気体が移動し、最終的に圧力が等しくなります（$P_B = P_C$）。体積はともに V です。

[エ]・[オ] 物質量の関係
状態方程式を書きます。
部屋B: $P_BV = n_BR(\tau T_0)$
部屋C: $P_CV = n_CRT_0$
$P_B = P_C$ より、
$n_B\tau T_0 = n_CT_0 \quad \Longrightarrow \quad n_C = \tau n_B$
よって、[エ] は τ なので、正解は ⓪ です。

気体の総量は保存されるため、$n_B + n_C = 2n_0$ です。
これに $n_C = \tau n_B$ を代入すると、
$n_B + \tau n_B = (1+\tau)n_B = 2n_0$
$n_B = \frac{2n_0}{\tau+1}$
$n_C = \tau n_B = \frac{2\tau}{\tau+1}n_0$
よって、[オ] は $\frac{2\tau}{\tau+1}$ なので、正解は ⑦ です。

[カ]・[キ] 内部エネルギー
$U_B = \frac{3}{2}n_BRT_B = \frac{3}{2}\left(\frac{2n_0}{\tau+1}\right)R(\tau T_0) = \frac{2\tau}{\tau+1}\left(\frac{3}{2}n_0RT_0\right) = \frac{2\tau}{\tau+1}U_0$
よって、[カ] は $\frac{2\tau}{\tau+1}$ で、正解は ⑦ です。

$U_C = \frac{3}{2}n_CRT_C = \frac{3}{2}\left(\frac{2\tau n_0}{\tau+1}\right)RT_0 = \frac{2\tau}{\tau+1}\left(\frac{3}{2}n_0RT_0\right) = \frac{2\tau}{\tau+1}U_0$
よって、[キ] も $\frac{2\tau}{\tau+1}$ で、正解は ⑦ です。
（圧力と体積が等しいため、内部エネルギーも等しくなります。）

[ク] 正味の熱量 Q
熱力学第一法則より、容器全体（B+C）は外部に対して仕事を行わない（体積変化なし）ので、加えられた熱量は内部エネルギーの増加量に等しくなります。

※ ここではBもCも両方とも内部エネルギーが増加している

$Q = \Delta U_{total} = (U_B + U_C) - (U_{B0} + U_{C0})$
初期状態の内部エネルギーは各部屋 U_0 なので、合計 $2U_0$。
最終状態の合計は $\frac{2\tau}{\tau+1}U_0 + \frac{2\tau}{\tau+1}U_0 = \frac{4\tau}{\tau+1}U_0$。
$Q = \left(\frac{4\tau}{\tau+1} - 2\right)U_0 = \frac{4\tau-2(\tau+1)}{\tau+1}U_0 = \frac{2(\tau-1)}{\tau+1}U_0$
よって、[ク] は $\frac{2(\tau-1)}{\tau+1}$ で、正解は ⑥ です。

---

(3) 部屋Bを冷却する過程

部屋Bを温度 τT_0 から T_0 まで下げます。
部屋Cの圧力 P_C は温度 T_0、物質量 n_C で一定です。Bの温度が下がると圧力 P_B は下がるため、C→Bへの逆流は起きません（弁は閉じます）。
一方、Aの圧力は初期状態の p_0 のままです。P_B が P_A を下回ると、A→Bへ弁が開きます。

[ケ] 弁が開く温度
A→Bの弁が開く条件は $P_A > P_B$ です。
$P_A = \frac{n_0RT_0}{V}$
$P_B = \frac{n_BRT_B}{V} = \frac{\frac{2n_0}{\tau+1}RT_B}{V}$
$P_A > P_B \iff n_0T_0 > \frac{2n_0}{\tau+1}T_B \iff T_B < \frac{\tau+1}{2}T_0$
よって、[ケ] は $\frac{\tau+1}{2}$ で、正解は ④ です。

[コ] 最終的な物質量の比較
最終的に温度はすべて T_0 になり、AとBの圧力は等しくなります。
$P_A = P_B \iff \frac{n_ART_0}{V} = \frac{n_BRT_0}{V} \iff n_A = n_B$
よって、[コ] は $n_A = n_B$ で、正解は ① です。

[サ] 放出熱量 Q_{out}
この過程での系（A+B）の内部エネルギー変化を考えます。仕事はゼロです。
放出した熱量 = 内部エネルギーの減少量 $= U_{initial} - U_{final}$。
初期（冷却開始時）：
$U_A = U_0$
$U_B = \frac{2\tau}{\tau+1}U_0$ （(2)の結果より）
合計 $U_{ini} = \left(1 + \frac{2\tau}{\tau+1}\right)U_0 = \frac{3\tau+1}{\tau+1}U_0$

最終（冷却終了時）：
物質量の合計 $n_A + n_B = n_0 + \frac{2n_0}{\tau+1} = \frac{\tau+3}{\tau+1}n_0$
温度は T_0 なので、内部エネルギー合計は
$U_{fin} = \frac{3}{2}(n_A + n_B)RT_0 = \left(\frac{\tau+3}{\tau+1}\right)\left(\frac{3}{2}n_0RT_0\right) = \frac{\tau+3}{\tau+1}U_0$

放出熱量 $Q_{out} = U_{ini} - U_{fin} = \left(\frac{3\tau+1}{\tau+1} - \frac{\tau+3}{\tau+1}\right)U_0 = \frac{2\tau-2}{\tau+1}U_0 = \frac{2(\tau-1)}{\tau+1}U_0$
よって、[サ] は $\frac{2(\tau-1)}{\tau+1}$ で、正解は ⑥ です。

---

(4) 繰り返した後の定常状態

操作を繰り返すと物質量の移動がなくなり、一定値 $\bar{n}_A, \bar{n}_B, \bar{n}_C$ に収束します。
物質量が変化しないということは、1サイクルの間で正味の移動量がゼロになるということです。
このサイクルでは気体の移動は一方向（A→B→C）のみ可能です。定常状態になるためには、各ステップで「移動が起こらない（または平衡状態がすでに成立している）」必要があります。

1. **加熱時（BとCの平衡）**
   温度 $T_B = \tau T_0, T_C = T_0$ で圧力が釣り合う状態になります。
   $P_B = P_C \implies \bar{n}_B \tau = \bar{n}_C$
   （この関係式は問題文の[エ] τ と一致します）

2. **冷却時（AとBの平衡）**
   温度 $T_A = T_0, T_B = T_0$ で圧力が釣り合う状態になります。
   $P_A = P_B \implies \bar{n}_A = \bar{n}_B$

これらと全物質量の保存則 $\bar{n}_A + \bar{n}_B + \bar{n}_C = 3n_0$ を連立します。
$\bar{n}_B + \bar{n}_B + \tau \bar{n}_B = 3n_0$
$(2+\tau)\bar{n}_B = 3n_0 \implies \bar{n}_B = \frac{3n_0}{\tau+2}$

[シ] Cの物質量
$\bar{n}_C = \tau \bar{n}_B = \frac{3\tau}{\tau+2} n_0$
よって、正解は ③ です。

[ス] 大小関係
$\bar{n}_A = \bar{n}_B$
$\bar{n}_C = \tau \bar{n}_B$
$\tau > 1$ なので、$\bar{n}_C > \bar{n}_B$ です。
したがって、$\bar{n}_A = \bar{n}_B < \bar{n}_C$ となります。
よって、正解は ④ です。