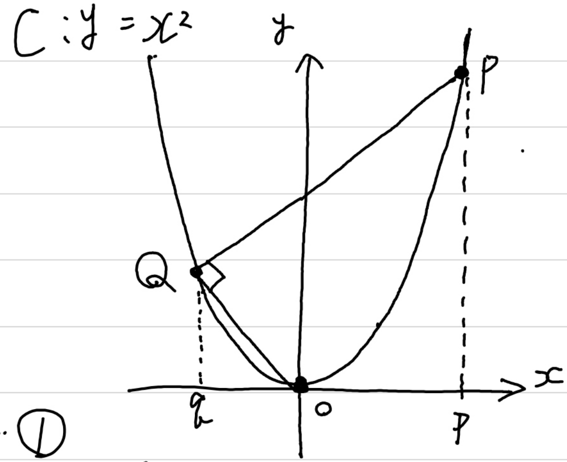
(1) PQの傾き $\dfrac{p^2-q^2}{p-q}=\dfrac{(p+q)(p-q)}{p-q}=p+q$

OQの傾き $\dfrac{-q^2}{-q}=q$



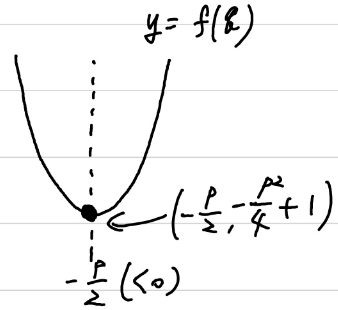

$\angle PQO=\frac{\pi}{2} \iff PQ \perp OQ$

$\iff (p+q)q=-1$

$\iff q^2+pq+1=0$ …①

ゆえに、①を満たす $q\,(<0)$ が存在する $p\,(>0)$ の範囲を求めれば良い。

$f(q)=q^2+pq+1=\left(q+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+1$




「①を満たす $q$ が存在」$\iff$「$-\frac{p^2}{4}+1 \leqq 0$」

$\iff p^2-4 \geqq 0$

$\iff (p+2)(p-2) \geqq 0$

$\iff \underline{p \geqq 2}$ $(\because p>0)$ //

(2) OPの傾き $\frac{p^2}{p}=p$

条件1 $\iff OP \perp OQ \iff pq=-1$ …②

$R(r, r^2)$ (ただし、$r \neq p, q$) とする。

PRの傾き $\dfrac{p^2-r^2}{p-r}=\dfrac{(p+r)(p-r)}{p-r}=p+r$

QRの傾き $\dfrac{q^2-r^2}{q-r}=\dfrac{(q+r)(q-r)}{q-r}=q+r$

条件2 $\iff$ RがO, P, Qのいずれとも異なるならば、PRとQRは垂直でない。

$\iff$ $r \neq 0, p, q$ ならば $(p+r)(q+r) \neq -1$

$\iff$ $r^2+(p+q)r+pq+1=0$ …③を満たす $0, p, q$ 以外の実数解 $r$ は存在しない。

条件1 かつ 条件2

$\iff$ 「$pq=-1$」…② かつ「③を満たす$0, p, q$以外の実数解$r$は存在しない」

$\iff$ 「$pq=-1$」かつ「$r^2+(p+q)r=0$ 〃」

$\iff$ 「$pq=-1$」かつ「$r+p+q=0$ 〃」

$\iff$ 「$pq=-1$」かつ「$r=-(p+q)$ が $0$ または $p$ または $q$」

$\iff$ 「$pq=-1$」かつ「$p=-q$ または $p=-\frac{q}{2}$ または $p=-2q$」

$\iff$ $(p, q)=(1, -1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ //